

複素数と四元数

木村 真琴

茨城大学理学部

2023年7月22日

茨城大学オープンキャンパス模擬授業

- 実数と直線

内容

- 実数と直線
- 複素数と平面

内容

- 実数と直線
- 複素数と平面
- 三元数の非存在

- 実数と直線
- 複素数と平面
- 三元数の非存在
- 四元数

- 実数と直線
- 複素数と平面
- 三元数の非存在
- 四元数
- 純虚四元数と空間

- 実数と直線
- 複素数と平面
- 三元数の非存在
- 四元数
- 純虚四元数と空間
- 空間の回転

数と図形

「数」と「図形」は、数学で扱う対象の中で最も基本的なものです。

その図形の中でも、さらに基本的な直線、平面、空間の点が、一つの数で表されることを見ていきます。

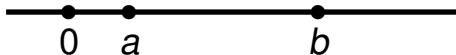
実数と直線

直線上に 0 と 1 の位置を定めると、どんな実数も直線上の点として (ただ一通りに) 表される。



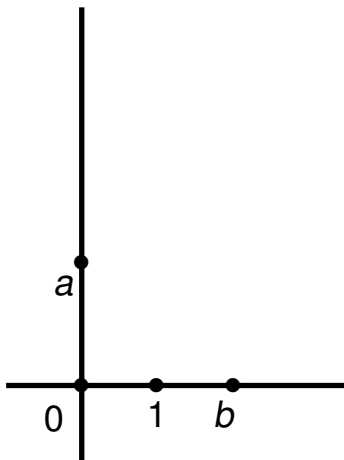
実数の和

実数の和



実数の積

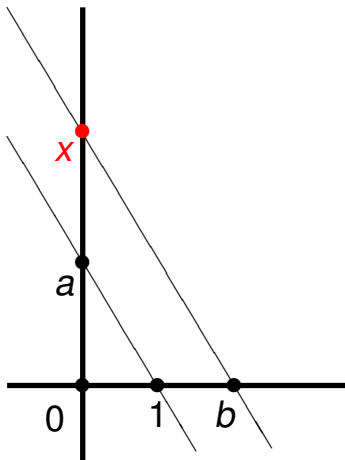
実数の積



実数と直線

実数の積

$1 : a = b : x$ より $x = ab$.



1 次方程式と 2 次方程式

係数が実数の 1 次方程式 $ax + b = 0$ ($a \neq 0$) は、必ず実数の解 $x = -\frac{b}{a}$ をもつ。

しかし、係数が実数の 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) は、判別式 $D = b^2 - 4ac$ が負のとき、実数の解を持たない:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

実数と複素数

しかし複素数

$$x + yi$$

(x と y は実数で、 $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位) を考えると、実数係数の2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ は $D = b^2 - 4ac < 0$ でも解を持つ:

$$x = \frac{1}{2a} \left(-b \pm i \sqrt{4ac - b^2} \right).$$

代数方程式

もっと一般に、実数係数の n 次代数方程式

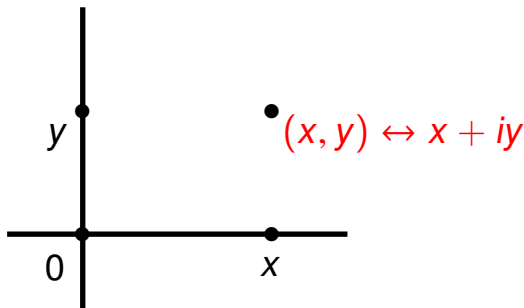
$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

($a_n \neq 0$) は、複素数の範囲で必ず解を持つ (代数学の基本定理)。

しかし、5 次以上の代数方程式では解の公式は存在しない (アーベル-ルフィニの定理、ガロア理論)。

複素数と平面

複素数 $x + yi$ と 2 つの実数の組 (x, y) は 1 対 1 に
対応するので、複素数と平面の点も 1 対 1 に対応す
る (複素数平面、ガウス平面)。

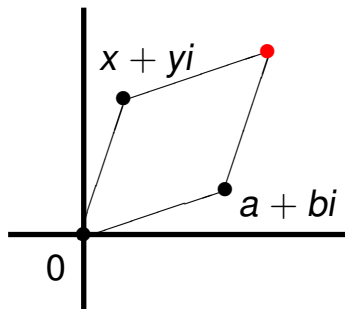


複素数の和

2つの複素数 $a + bi$ と $x + yi$ の和は

$$(a + bi) + (x + yi) = (a + x) + (b + y)i$$

で定義される (平面ベクトルの和):



複素数の積

2つの複素数 $a + bi$ と $x + yi$ の積は

$$\begin{aligned}(a + bi)(x + yi) &= ax + ayi + bxi + byi^2 \\ &= (ax - by) + (ay + bx)i\end{aligned}$$

で定義される。

複素数の絶対値，共役複素数，逆数

複素数 $z = x + iy$ の絶対値: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$z = x + iy$ の共役複素数: $\bar{z} = x - iy$.

このとき， $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ ，そして

$$\begin{aligned} z\bar{z} = \bar{z}z &= (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 \\ &= |z|^2. \end{aligned}$$

ゆえに， $z \neq 0$ の逆数は

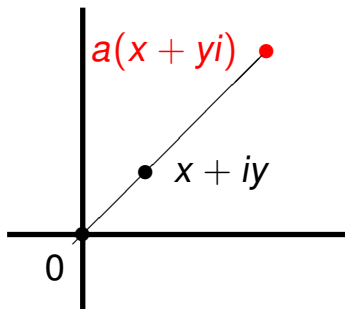
$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

複素数の実数倍

特に、実数 a を複素数 $x + yi$ にかけると:

$$a(x + yi) = ax + ayi \leftrightarrow a(x, y) = (ax, ay)$$

となる (平面ベクトルの拡大・縮小):

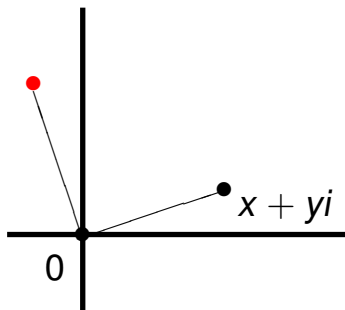


複素数の i 倍

虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ を複素数 $x + yi$ にかけると

$$i(x + yi) = xi + yi^2 = -y + xi$$

となる (平面ベクトルの 90 度回転):



複素数の i 倍

特に $i^2 = -1$ は、90 度回転を 2 回くり返したら 180 度回転することと同じ! であることを意味している。

さらに $i^4 = 1$ は、90 度回転を 4 回くり返したら、元に戻ることを意味している。そして $z = 1, -1, \pm i$ は $z^4 = 1$ の解である。

平面の回転

平面の点 $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ を角度 α (ラジアン) だけ回転すると、 $r \cos(\theta + \alpha), r \sin(\theta + \alpha)$ にうつるが、これは複素数 $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ に (絶対値が 1 の) 複素数 $\cos \alpha + i \sin \alpha$ をかけることと対応している (三角関数の加法定理):

$$\begin{aligned} & r(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \alpha + i \sin \alpha) \\ &= r(\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha \\ & \quad + i(\cos \theta \sin \alpha + \sin \theta \cos \alpha)) \\ &= r(\cos(\theta + \alpha) + i \sin(\theta + \alpha)). \end{aligned}$$

空間と三元数!?

平面の点 (a, b) と複素数 $a + bi$ は同一視できた。
では、空間の点を表す数として、(複素数のマネをして) 次のような三元数!?!を考えてみよう:

$$a + bi + cj, \quad i^2 = j^2 = -1$$

(ただし a, b, c はすべて実数)。

空間と三元数!?

しかし「三元数は存在しない」ことが証明できる!
(証明) 背理法で証明する。三元数が存在したとすると、三元数 i と j の積も三元数のはずなので

$$ij = a + bi + cj$$

(a, b, c は実数) と書ける。両辺に左から i をかけると

$$i^2j = ai + bi^2 + cij.$$

空間と三元数!?

$$i^2j = ai + bi^2 + cij,$$

$$-j = -b + ai + c(a + bi + cj),$$

$$-j = -b + ac + (a + bc)i + c^2j.$$

両辺の j の係数を比較すると、 $-1 = c^2$ となり、 c は実数だったので**矛盾** Q.E.D.

四元数の発見

1843年10月16日の月曜日、アイルランドの数学者ハミルトンは、妻と運河沿いの道を歩いているとき、四元数の概念が頭の中で明確になり、衝動を抑えられずに、四元数の基本公式

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

を、渡っていた橋の石に刻みつけた!

四元数の定義

実数 a, b, c, d と文字 i, j, k を用いて、

$$q = a + bi + cj + dk$$

と表される「数」を四元数という。

ただし、 i, j と k は $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ と、

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j$$

をみたすとする。特に、四元数についての積の交換法則は成り立たない!

四元数の実部と虚部、純虚四元数

四元数 $q = a + bi + cj + dk$ について、 a を四元数 q の**実部** (またはスカラー成分)、 $bi + cj + dk$ を q の**虚部** (またはベクトル成分) という。

とくに、 $bi + cj + dk$ の形の四元数で b, c, d のうち少なくともひとつは0でないものを **純虚四元数** という。

純虚四元数 $bi + cj + dk$ は、**空間内の (原点以外の) 点** (b, c, d) と同一視できる!

$$bi + cj + dk \leftrightarrow (b, c, d)$$

四元数の和

四元数 $q = a + bi + cj + dk$ と
 $q' = x + yi + zj + wk$ について、和は

$$q + q' = (a + x) + (b + y)i + (c + z)j + (d + w)k$$

と定義される。特に、純虚四元数どうしの和は純虚四元数となる (空間ベクトルの和)。

四元数の積

四元数 $q = a + bi + cj + dk$ と $q' = x + yi + zj + wk$ の積は関係式 $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ と、

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j$$

を用いて定義される:

四元数の積

$$\begin{aligned}qq' &= (a + bi + cj + dk)(x + yi + zj + wk) \\ &= (ax - by - cz - dw) \\ &\quad + (ay + bx + cw - dz)i \\ &\quad + (az - bw + cx + dy)j \\ &\quad + (aw + bz - cy + dx)k.\end{aligned}$$

ここで、純虚四元数どうしの積は純虚四元数になる
とは限らない!

四元数の絶対値，共役四元数

四元数 $q = a + bi + cj + dk$ の絶対値:

$$|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

$q = a + bi + cj + dk$ の共役四元数:

$$\bar{q} = a - bi - cj - dk.$$

このとき，2つの四元数 q_1, q_2 について次が成り立つ:

$$\overline{q_1 q_2} = \bar{q}_2 \bar{q}_1.$$

四元数の絶対値，共役四元数，逆数

そして，

$$\begin{aligned}q\bar{q} &= (a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) \\&= a^2 - abi - acj - adk \\&\quad + abi - b^2i^2 - bcij - bdik \\&\quad + acj - bcji - c^2j^2 - cdjk \\&\quad + adk - bdki - cdkj - d^2k^2 \\&= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = |q|^2.\end{aligned}$$

ゆえに， $q \neq 0$ の逆数は $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$.

空間ベクトルの x 軸に関する 90 度回転

空間ベクトル (a, b, c) を x 軸の周りに 90 度回転することと、純虚四元数 $q = ai + bj + ck$ に左から $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ と右から $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ をかけることが対応する:

$$q \rightarrow \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) q \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}(1+i)q(1-i).$$

空間ベクトルの x 軸に関する 90 度回転

実際、純虚四元数 $q = ai + bj + ck$ に左から $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$
と右から $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ をかけると:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)(ai + bj + ck)\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}(1+i)(ai + bj + ck)(1-i) = (ai - cj + bk). \end{aligned}$$

となる！

例

この回転で、点 $p = (1, 0, 0)$ を動かしてみると、対応する純虚四元数は $p = i$ なので、

$$i \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)i \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) = \frac{1}{2}(-1+i)(1-i) =$$

$$\frac{1}{2}(-1+i+i+1) = i. \text{ このことは、空間の点}$$

$(1, 0, 0)$ を x 軸のまわりに 90° 回転しても変わらないことを意味している!

例

この回転で、点 $p = (0, 1, 0)$ を動かしてみると、対応する純虚四元数は $p = j$ なので、

$$j \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)j \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) = \frac{1}{2}(j+k)(1-i) =$$

$\frac{1}{2}(j+k+k-j) = k$. このことは、空間の点

$(0, 1, 0)$ を x 軸のまわりに 90° 回転すると $(0, 0, 1)$ にうつることを意味している!

練習問題

では、この回転で点 $p = (0, 0, 1)$ を動かしてみると、どうなるか？ 対応する純虚四元数は k なので、 $\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)k\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$ を計算すればよい！

空間の回転と絶対値 1 の四元数の積

空間内の長さ 1 のベクトル $v = (a, b, c)$
($a^2 + b^2 + c^2 = 1$) を回転軸とする、空間内の角度 θ の回転を考える。

四元数 q を $q = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}(ai + bj + ck)$ と定義すると、

$|q|^2 = \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}(a^2 + b^2 + c^2) = 1$ であることがわかる。

このとき、空間内の点 $p = (x, y, z)$ の回転軸 $v = (a, b, c)$ に関する角度 θ の回転は、

空間の回転と絶対値 1 の四元数の積

p に対応する純虚四元数 $p = xi + yj + zk$ に qpq^{-1} (q^{-1} は四元数 $q \neq 0$ の逆数) を対応させることで表される!

ここで、 $|q|^2 = q\bar{q} = 1$ より $q^{-1} = \bar{q}$ であることに注意すると、

純虚四元数 p に対して、

$\overline{qpq^{-1}} = \overline{q^{-1}p\bar{q}} = q(-p)q^{-1} = -qpq^{-1}$ となり、
 qpq^{-1} も純虚四元数であることがわかる。

空間の回転

空間内の長さ 1 のベクトル $v = (a, b, c)$
($a^2 + b^2 + c^2 = 1$) を回転軸とする、空間内の角度 θ の回転を四元数を使わずに表すと、
空間内の点 $p = (x, y, z)$ は
 $((\cos \theta + a^2(1 - \cos \theta))x + (ab(1 - \cos \theta) - c \sin \theta)y + (ac(1 - \cos \theta) + b \sin \theta)z,$
 $(ab(1 - \cos \theta) + c \sin \theta)x + (\cos \theta + b^2(1 - \cos \theta))y + (bc(1 - \cos \theta) - a \sin \theta)z,$
 $(ac(1 - \cos \theta) - b \sin \theta)x + (bc(1 - \cos \theta) + a \sin \theta)y + (\cos \theta + c^2(1 - \cos \theta))z)$ にうつる!

四元数は、実際にコンピュータ・グラフィックスで使われている。

もちろん、数学の研究にも深く使われている。

さらに「八元数」もある! (ケイリー代数ともいう)。

八元数では、積の「結合法則」も成り立たない! しかし、物理学で究極の理論?と言われている「超弦理論」でも、八元数に関わる数学が使われている!?

- 「数学をいかに使うか」 志村五郎著、ちくま学芸文庫

参考文献

- 「数学をいかに使うか」 志村五郎著、ちくま学芸文庫
- 「四元数・八元数とディラック理論」 森田克貞著、日本評論社

参考文献

- 「数学をいかに使うか」 志村五郎著、ちくま学芸文庫
- 「四元数・八元数とディラック理論」 森田克貞著、日本評論社
- 「四元数と八元数、幾何、算術、そして対称性」 J.H. コンウェイ/D.A. スミス著 山田修司訳、培風館

参考文献

- 「数学をいかに使うか」 志村五郎著、ちくま学芸文庫
- 「四元数・八元数とディラック理論」 森田克貞著、日本評論社
- 「四元数と八元数、幾何、算術、そして対称性」 J.H. コンウェイ/D.A. スミス著 山田修司訳、培風館
- 「Spinors and Calibrations」 F.R.Harvey 著、Academic Press