複素数と四元数

木村　真琴

茨城大学理学部

2019 年 7 月 27 日
茨城大学オープンキャンパス模擬授業

内容

- 実数と直線

内容

- 実数と直線
- 複素数と平面

内容

- 実数と直線
- 複素数と平面
- 三元数の非存在

内容

- 実数と直線
- 複素数と平面
- 三元数の非存在
- 四元数

内容

- 実数と直線
- 複素数と平面
- 三元数の非存在
- 四元数
- 純虚四元数と空間

内容

- 実数と直線
- 複素数と平面
- 三元数の非存在
- 四元数
- 純虚四元数と空間
- 空間の回転

数と図形

「数」と「図形」は、数学で扱う対象の中で最も基本的なものです。

その図形の中でも、さらに基本的な直線、平面、空間の点が、一つの数で表されることを見ていきます。

実数と直線

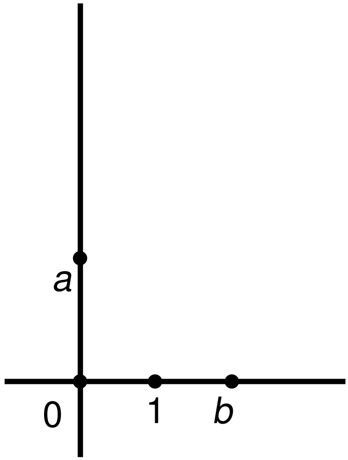
直線上に 0 と 1 の位置を定めると、どんな実数も直線上の点として (ただ一通りに) 表される。

実数の和

実数の和

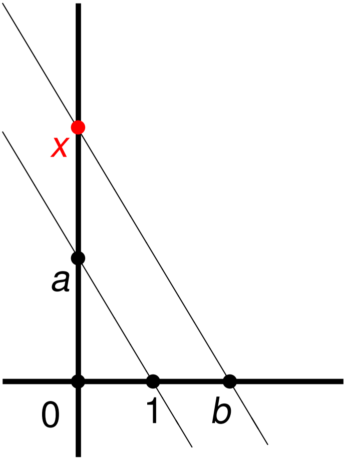
実数の積

実数の積



実数と直線

実数の積　　$1 : a = b : x$ より $x = ab$.



1 次方程式と 2 次方程式

係数が実数の 1 **次方程式** $ax + b = 0$ $(a \neq 0)$ **は、必ず実数の解** $x = -\frac{b}{a}$ **をもつ。**
しかし、係数が実数の 2 **次方程式** $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ **は、判別式** $D = b^2 - 4ac$ **が負のとき、実数の解を持たない**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

実数と複素数

しかし複素数

$$x + yi$$

(x と y は実数で、$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位) を考えると、実数係数の 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ は $D = b^2 - 4ac < 0$ でも解を持つ:

$$x = \frac{1}{2a}\left(-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}\right).$$

代数方程式

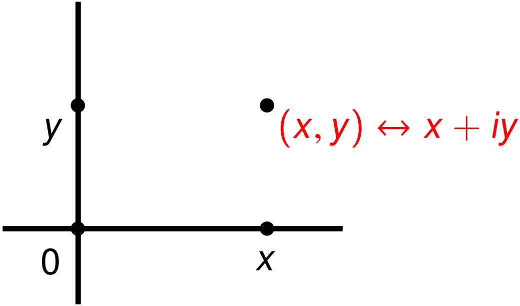
もっと一般に、実数係数の n 次代数方程式

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

$(a_n \neq 0)$ は、複素数の範囲で必ず解を持つ (代数学の基本定理)。
しかし、5 次以上の代数方程式では階の公式は存在しない (アーベル-ルフィニの定理、ガロア理論)。

複素数と平面

複素数 $x + yi$ **と 2 つの実数の組** (x, y) **は 1 対 1 に対応するので、複素数と平面の点も 1 対 1 に対応する (複素数平面、ガウス平面)。**

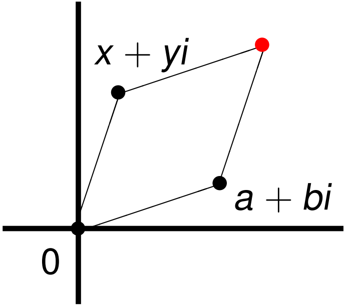


複素数の和

2 つの複素数 $a + bi$ と $x + yi$ の和は

$$(a + bi) + (x + yi) = (a + x) + (b + y)i$$

で定義される (**平面ベクトルの和**):



複素数の積

2 つの複素数 $a+bi$ と $x+yi$ の積は

$$\begin{aligned}(a+bi)(x+yi) &= ax+ayi+bxi+byi^2 \\ &= (ax-by)+(ay+bx)i\end{aligned}$$

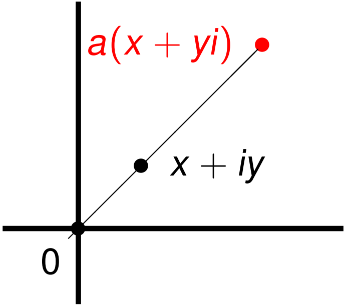
で定義される。

複素数の実数倍

特に、実数 a を複素数 $x+yi$ にかけると:

$$a(x+yi) = ax + ayi \leftrightarrow a(x,y) = (ax, ay)$$

となる (**平面ベクトルの拡大・縮小**):

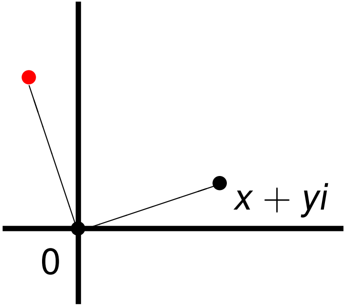


複素数の i 倍

虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ を複素数 $x + yi$ にかけると

$$i(x + yi) = xi + yi^2 = -y + xi$$

となる (平面ベクトルの 90 度回転):



複素数の i 倍

特に $i^2 = -1$ は、90 度回転を 2 回くり返したら 180 度回転することと同じ! であることを意味している。

さらに $i^4 = 1$ は、90 度回転を 4 回くり返したら、元に戻ることを意味している。そして $z = 1, -1, \pm i$ は $z^4 = 1$ の解である。

平面の回転

平面の点 (x, y) を θ (ラジアン) 回転すると $(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$ にうつるが、これは複素数 $x + yi$ に (絶対値が 1 の) 複素数 $\cos\theta + i\sin\theta$ をかけることと対応している:

$$\begin{aligned} &(x + yi)(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= (x\cos\theta - y\sin\theta) + i(x\sin\theta + y\cos\theta). \end{aligned}$$

空間と三元数!?

平面の点 (a, b) と複素数 $a + bi$ は同一視できた。
では、空間の点を表す数として、(複素数のマネをして) 次のような**三元数**!?を考えてみよう:

$$a + bi + cj, \quad i^2 = j^2 = -1$$

(ただし a, b, c はすべて実数)。

空間と三元数!?

しかし「三元数は存在しない」ことが証明できる!
(証明) 背理法で証明する。三元数が存在したとすると、三元数 i と j の積も三元数のはずなので

$$ij = a + bi + cj$$

$(a, b, c$ は実数$)$ と書ける。両辺に左から i をかけると

$$i^2 j = ai + bi^2 + cij.$$

空間と三元数!?

$$
\begin{aligned}
i^2 j &= ai + bi^2 + cij, \\
-j &= -b + ai + c(a + bi + cj), \\
-j &= -b + ac + (a + bc)i + c^2 j.
\end{aligned}
$$

両辺の j **の係数を比較すると、** $-1 = c^2$ **となり、** c **は実数だったので矛盾** Q.E.D.

四元数の発見

1843 年 10 月 16 日の月曜日、アイルランドの数学者**ハミルトン**は、妻と運河沿いの道を歩いているとき、四元数の概念が頭の中で明確になり、衝動を抑えられずに、四元数の基本公式

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

を、渡っていた橋の石に刻みつけた!

四元数の定義

実数 a, b, c, d と文字 i, j, k を用いて、

$$q = a + bi + cj + dk$$

と表される「数」を**四元数**という。
ただし、i, j と k は $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ と、

$$ij = -ji = k, \ jk = -kj = i, \ ki = -ik = j$$

をみたすとする。 特に、四元数についての積の交換法則は**成り立たない**!

四元数の実部と虚部、純虚四元数

四元数 $q = a + bi + cj + dk$ **について、**a **を四元数** q **の実部 (またはスカラー成分)、**$bi + cj + dk$ **を** q **の虚部 (またはベクトル成分) という。**
とくに、$bi + cj + dk$ **の形の四元数で** b, c, d **のうち少なくともひとつは** 0 **でないものを 純虚四元数という。**
純虚四元数 $bi + cj + dk$ **は、空間内の (原点以外の) 点** (b, c, d) **と同一視できる!**

$$bi + cj + dk \leftrightarrow (b, c, d)$$

四元数の和

四元数 $q = a + bi + cj + dk$ と
$q' = x + yi + zj + wk$ について、和は

$$q + q' = (a + x) + (b + y)i + (c + z)j + (d + w)k$$

と定義される。特に、純虚四元数どうしの和は純虚四元数となる (空間ベクトルの和)。

四元数の積

四元数 $q = a + bi + cj + dk$ と $q' = x + yi + zj + wk$ の積は関係式 $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ と、

$$ij = -ji = k, \; jk = -kj = i, \; ki = -ik = j$$

を用いて定義される:

四元数の積

$$
\begin{aligned}
qq' &= (a + bi + cj + dk)(x + yi + zj + wk) \\
&= (ax - by - cz - dw) \\
&+ (ay + bx + cw - dz)i \\
&+ (az - bw + cx + dy)j \\
&+ (aw + bz - cy + dx)k.
\end{aligned}
$$

ここで、純虚四元数どうしの積は純虚四元数になるとは限らない!

空間ベクトルの x 軸に関する 90 度回転

空間ベクトル (a, b, c) **を** x **軸の周りに 90 度回転することと、純虚四元数** $q = ai + bj + ck$ **に左から** $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ **と右から** $\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ **をかけることが対応する**:

$$\color{red}{q} \to \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) q \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}(1+i)\color{red}{q}(1-i).$$

例

この回転で、点 $p = (1, 0, 0)$ を動かしてみると、対応する純虚四元数は $p = i$ なので、
$i \to \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)i\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) = \frac{1}{2}(-1+i)(1-i) = \frac{1}{2}(-1+i+i+1) = i$. このことは、空間の点 $(1, 0, 0)$ を x 軸のまわりに 90° 回転しても変わらないことを意味している!

例

この回転で、点 $p = (0, 1, 0)$ を動かしてみると、対応する純虚四元数は $p = j$ なので、

$$j \to \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)j\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) = \frac{1}{2}(j+k)(1-i) = \frac{1}{2}(j+k+k-j) = k.$$

このことは、空間の点 $(0, 1, 0)$ を x **軸のまわりに** 90° **回転**すると $(0, 0, 1)$ にうつることを意味している!

練習問題

では、この回転で点 $p = (0,0,1)$ を動かしてみると、どうなるか? 対応する純虚四元数は k なので、

$\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)k\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$ を計算すればよい!

空間の回転と絶対値 1 の四元数の積

空間内の長さ 1 のベクトル $v = (a, b, c)$
$(a^2 + b^2 + c^2 = 1)$ を**回転軸**とする、空間内の角度
θ の**回転**を考える。
四元数 q を $q = \cos\dfrac{\theta}{2} + \sin\dfrac{\theta}{2}(ai + bj + ck)$ と定義
すると、
$|q|^2 = \cos^2\dfrac{\theta}{2} + \sin^2\dfrac{\theta}{2}(a^2 + b^2 + c^2) = 1$ であるこ
とがわかる。
このとき、空間内の点 $p = (x, y, z)$ の回転軸
$v = (a, b, c)$ に関する角度 θ の回転は、

空間の回転と絶対値 1 の四元数の積

p に対応する純虚四元数 $p = xi + yj + zk$ に qpq^{-1} (q^{-1} は四元数 $q \neq 0$ の逆数) を対応させることで表される!
ここで、$|q|^2 = q\bar{q} = 1$ より $q^{-1} = \bar{q}$ であることに注意すると、
純虚四元数 p に対して、
$\overline{qpq^{-1}} = \overline{q^{-1}}\bar{p}\bar{q} = q(-p)q^{-1} = -qpq^{-1}$ となり、
qpq^{-1} **も純虚四元数**であることがわかる。

空間の回転

空間内の長さ 1 のベクトル $v = (a, b, c)$ $(a^2 + b^2 + c^2 = 1)$ を**回転軸**とする、空間内の角度 θ の**回転**を**四元数を使わずに表す**と、
空間内の点 $p = (x, y, z)$ は
$((\cos\theta + a^2(1 - \cos\theta))x + (ab(1 - \cos\theta) - c\sin\theta)y + (ac(1 - \cos\theta) + b\sin\theta)z,$
$(ab(1 - \cos\theta) + c\sin\theta)x + (\cos\theta + b^2(1 - \cos\theta))y + (bc(1 - \cos\theta) - a\sin\theta)z,$
$(ac(1 - \cos\theta) - b\sin\theta)x + (bc(1 - \cos\theta) + a\sin\theta)y + (\cos\theta + c^2(1 - \cos\theta))z)$ にうつる!

結び

四元数は、実際にコンピュータ・グラフィックスで使われている。

もちろん、数学の研究にも深く使われている。

さらに「八元数」もある! (ケイリー代数ともいう)。

参考文献

- 「数学をいかに使うか」 志村五郎著、ちくま学芸文庫

参考文献

- 「数学をいかに使うか」 志村五郎著、ちくま学芸文庫
- 「四元数・八元数とディラック理論」 森田克貞著、日本評論社

参考文献

- 「数学をいかに使うか」 志村五郎著、ちくま学芸文庫
- 「四元数・八元数とディラック理論」 森田克貞著、日本評論社
- 「四元数と八元数、幾何、算術、そして対称性」J.H. コンウェイ/D.A. スミス著 山田修司訳、培風館

参考文献

- 「数学をいかに使うか」 志村五郎著、ちくま学芸文庫
- 「四元数・八元数とディラック理論」 森田克貞著、日本評論社
- 「四元数と八元数、幾何、算術、そして対称性」J.H. コンウェイ/D.A. スミス著 山田修司訳、培風館
- 「Spinors and Calibrations」 F.R.Harvey 著、Academic Press