

線織部分多様体について

木村 真琴

茨城大学理学部

平成 30 年 1 月 26 日

- Introduction

- Introduction
- \mathbb{R}^3 の線織面

- Introduction
- \mathbb{R}^3 の線織面
- 球面内の線織部分多様体

- Introduction
- \mathbb{R}^3 の線織面
- 球面内の線織部分多様体
- 球面内の austere 部分多様体の構成

- Introduction
- \mathbb{R}^3 の線織面
- 球面内の線織部分多様体
- 球面内の austere 部分多様体の構成
- 複素双曲空間内の線織実超曲面について

変分問題と微分幾何学

- 微分幾何学において、重要な研究対象は**変分問題の解**として得られることが多い。

変分問題と微分幾何学

- 微分幾何学において、重要な研究対象は**変分問題の解**として得られることが多い。
- コンパクト多様体 M 上の Riemann 計量 g に対して、全スカラー曲率 $\int_M s_g d\mu_g$ の臨界点は **Einstein 計量** $\text{Ric}_g = \lambda g$ である。

変分問題と微分幾何学

- 微分幾何学において、重要な研究対象は**変分問題の解**として得られることが多い。
- コンパクト多様体 M 上の Riemann 計量 g に対して、全スカラー曲率 $\int_M s_g d\mu_g$ の臨界点は **Einstein 計量** $\text{Ric}_g = \lambda g$ である。
- Riemann 多様体間の写像 $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$ のエネルギー汎関数 $(1/2) \int_M |df|^2 d\mu_g$ の臨界点は **調和写像** $\text{trace}_g \nabla df = 0$ とよばれる。

極小部分多様体

- Riemann 多様体 (N, g) の部分多様体 M について、体積汎関数の (compact support をもつ) 変分の臨界点は、

極小部分多様体

- Riemann 多様体 (N, g) の部分多様体 M について、体積汎関数の (compact support をもつ) 変分の臨界点は、
- **極小部分多様体** $H = 0$ である。

極小部分多様体

- Riemann 多様体 (N, g) の部分多様体 M について、体積汎関数の (compact support をもつ) 変分の臨界点は、
- **極小部分多様体** $H = 0$ である。
- ここで、 $H = (1/n) \sum \sigma(e_i, e_i)$ ($n = \dim M$) は部分多様体 M の**平均曲率ベクトル**、 σ は M の**第二基本形式**で、 $\{e_1, \dots, e_n\}$ は M の接空間の正規直交基である。

部分多様体の第二基本形式

- (N, g) の Levi-Civita 接続を ∇^N , M の誘導計量に関する M の Levi-Civita 接続を ∇^M とする。

部分多様体の第二基本形式

- (N, g) の Levi-Civita 接続を ∇^N , M の誘導計量に関する M の Levi-Civita 接続を ∇^M とする。
- M に接するベクトル場 X, Y について、 $\sigma(X, Y) = \nabla_X^N Y - \nabla_X^M Y$ とすると、

部分多様体の第二基本形式

- (N, g) の Levi-Civita 接続を ∇^N , M の誘導計量に関する M の Levi-Civita 接続を ∇^M とする。
- M に接するベクトル場 X, Y について、 $\sigma(X, Y) = \nabla_X^N Y - \nabla_X^M Y$ とすると、
- σ は、 M の各点で法ベクトル空間に値をもつ対称双一次形式で、 M の第二基本形式という。

全測地的部分多様体

- 特に、 $\sigma = 0$ となる部分多様体は全測地的であるという。

全測地的部分多様体

- 特に、 $\sigma = 0$ となる部分多様体は全測地的であるという。
- Euclid 空間 \mathbb{R}^n の全測地的部分多様体は、線形部分空間 \mathbb{R}^k (を平行移動した affine 部分空間) であり、球面 S^n の全測地的部分多様体は、大球 S^k である。

全測地的部分多様体

- 特に、 $\sigma = 0$ となる部分多様体は全測地的であるという。
- Euclid 空間 \mathbb{R}^n の全測地的部分多様体は、線形部分空間 \mathbb{R}^k (を平行移動した affine 部分空間) であり、球面 S^n の全測地的部分多様体は、大球 S^k である。
- 定義より、全測地的部分多様体は極小であるが、一般に逆は成り立たない。

全測地的部分多様体

- 特に、 $\sigma = 0$ となる部分多様体は全測地的であるという。
- Euclid 空間 \mathbb{R}^n の全測地的部分多様体は、線形部分空間 \mathbb{R}^k (を平行移動した affine 部分空間) であり、球面 S^n の全測地的部分多様体は、大球 S^k である。
- 定義より、全測地的部分多様体は極小であるが、一般に逆は成り立たない。
- 対称空間の全測地的部分多様体は Chen-長野によって研究されている (Duke Math. J., 1977, 1978)

\mathbb{R}^3 の極小曲面

- 3次元 Euclid 空間 \mathbb{R}^3 の極小曲面は、(局所的には)「石鹸膜」として実現される。

\mathbb{R}^3 の極小曲面

- 3次元 Euclid 空間 \mathbb{R}^3 の極小曲面は、(局所的には)「石鹸膜」として実現される。
- \mathbb{R}^3 の曲面を、局所的に2変数関数 $u(x, y)$ のグラフ $(x, y, u(x, y))$ と表した時、極小曲面の方程式は

\mathbb{R}^3 の極小曲面

- 3次元 Euclid 空間 \mathbb{R}^3 の極小曲面は、(局所的には)「石鹸膜」として実現される。
- \mathbb{R}^3 の曲面を、局所的に2変数関数 $u(x, y)$ のグラフ $(x, y, u(x, y))$ と表した時、極小曲面の方程式は
- $(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0$ と、2階楕円型偏微分方程式になる。

部分多様体の対称性

- 「Einstein 計量」「調和写像」「極小部分多様体」の方程式は、一般にそれぞれ偏微分方程式となり、解くのは難しい。

部分多様体の対称性

- 「Einstein 計量」「調和写像」「極小部分多様体」の方程式は、一般にそれぞれ偏微分方程式となり、解くのは難しい。
- そこで、考えている対象に**対称性**を仮定して、方程式を常微分方程式に帰着させて、その解を調べることも多い。

部分多様体の対称性

- 「Einstein 計量」「調和写像」「極小部分多様体」の方程式は、一般にそれぞれ偏微分方程式となり、解くのは難しい。
- そこで、考えている対象に**対称性**を仮定して、方程式を常微分方程式に帰着させて、その解を調べることも多い。
- \mathbb{R}^3 の曲面で、「対称性」をもつクラスとして、

部分多様体の対称性

- 「Einstein 計量」「調和写像」「極小部分多様体」の方程式は、一般にそれぞれ偏微分方程式となり、解くのは難しい。
- そこで、考えている対象に**対称性**を仮定して、方程式を常微分方程式に帰着させて、その解を調べることも多い。
- \mathbb{R}^3 の曲面で、「対称性」をもつクラスとして、
- (i) **回転面**と (ii) **線織面**がある。

回転面の一般化

- \mathbb{R}^3 の回転面は、半平面内の曲線を回転することにより得られる。

回転面の一般化

- \mathbb{R}^3 の回転面は、半平面内の曲線を回転することにより得られる。
- このとき、極小曲面の方程式は常微分方程式に帰着されて、具体的に解くことができ、

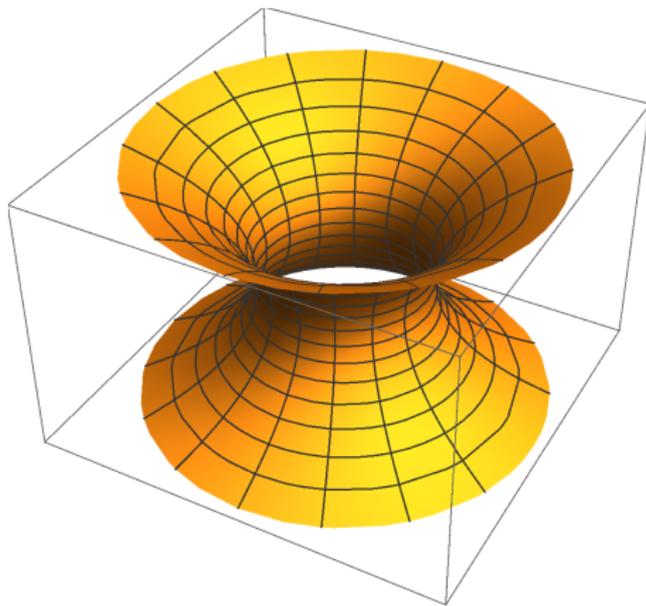
回転面の一般化

- \mathbb{R}^3 の回転面は、半平面内の曲線を回転することにより得られる。
- このとき、極小曲面の方程式は常微分方程式に帰着されて、具体的に解くことができ、
- \mathbb{R}^3 の回転面が極小曲面ならば、**平面か懸垂面**の一部である (Bonnet, 1860)。

回転面の一般化

- \mathbb{R}^3 の回転面は、半平面内の曲線を回転することにより得られる。
- このとき、極小曲面の方程式は常微分方程式に帰着されて、具体的に解くことができ、
- \mathbb{R}^3 の回転面が極小曲面ならば、**平面か懸垂面**の一部である (Bonnet, 1860)。
- この結果は、Riemann 対称空間内の極小超曲面の構成などに一般化されている (equivariant geometry)。

懸垂面



\mathbb{R}^3 の線織面

- \mathbb{R}^3 内の直線の 1 パラメーター族からなる曲面を線織面という。

\mathbb{R}^3 の線織面

- \mathbb{R}^3 内の直線の 1 パラメーター族からなる曲面を線織面という。
- \mathbb{R}^3 の線織面の例として、平面、柱面、錐面、常螺旋面、接線曲面、一葉双曲面、双曲放物面 (最後の 2 つは、二重線織面) がある。

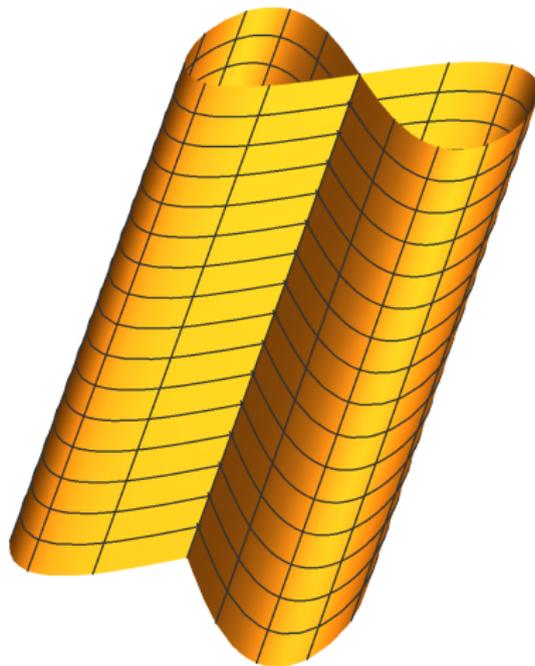
\mathbb{R}^3 の線織面

- \mathbb{R}^3 内の直線の 1 パラメーター族からなる曲面を線織面という。
- \mathbb{R}^3 の線織面の例として、平面、柱面、錐面、常螺旋面、接線曲面、一葉双曲面、双曲放物面(最後の 2 つは、二重線織面)がある。
- \mathbb{R}^3 内の直線は affine 変換で保たれるので、線織面は affine 幾何の研究対象でもあり、さらに

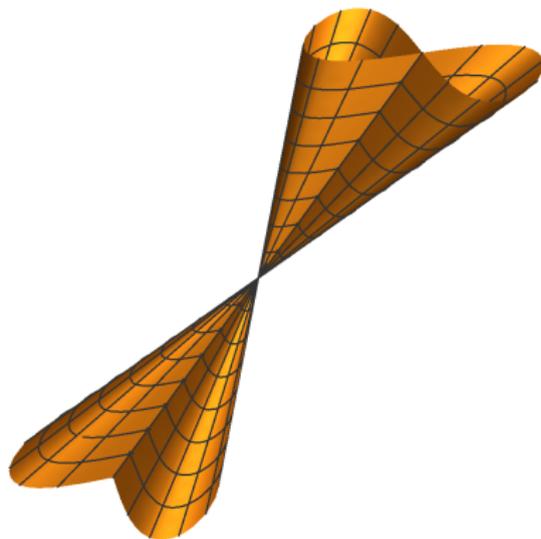
\mathbb{R}^3 の線織面

- \mathbb{R}^3 内の直線の 1 パラメーター族からなる曲面を線織面という。
- \mathbb{R}^3 の線織面の例として、平面、柱面、錐面、常螺旋面、接線曲面、一葉双曲面、双曲放物面(最後の 2 つは、二重線織面)がある。
- \mathbb{R}^3 内の直線は affine 変換で保たれるので、線織面は affine 幾何の研究対象でもあり、さらに
- 射影幾何、代数幾何でも研究されている。

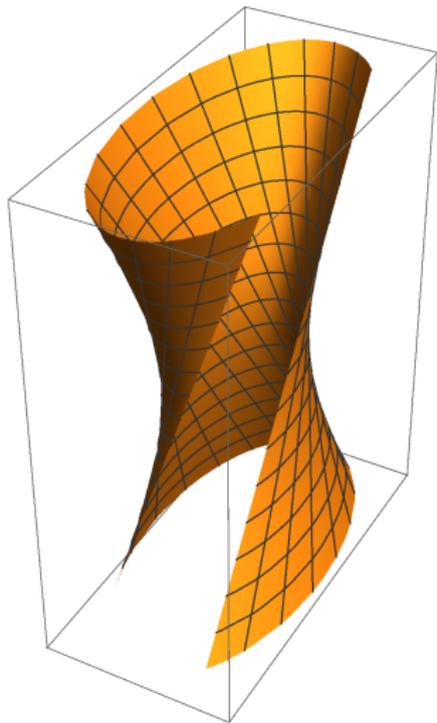
8の字曲線の柱面



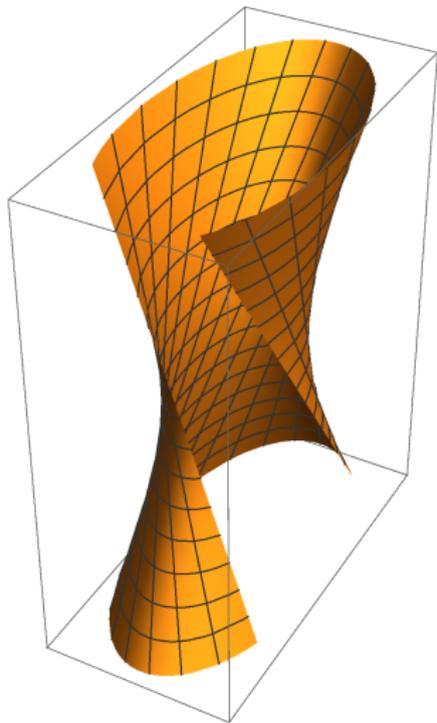
8の字曲線の錐面



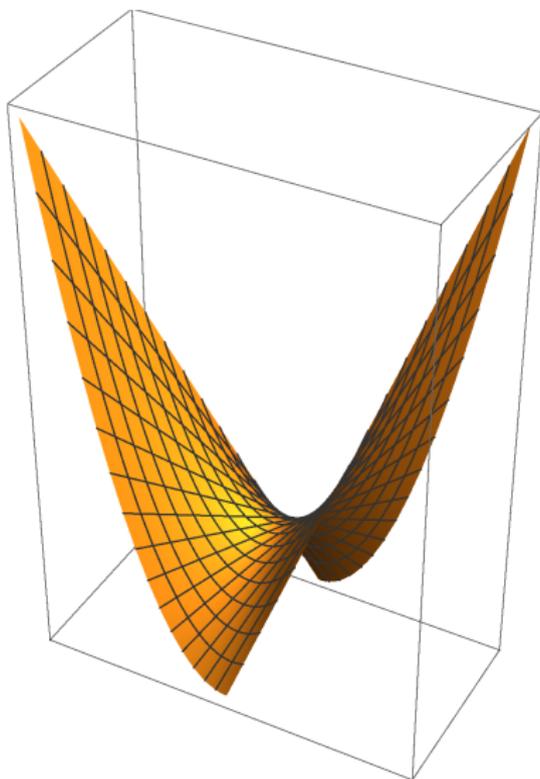
一葉双曲面



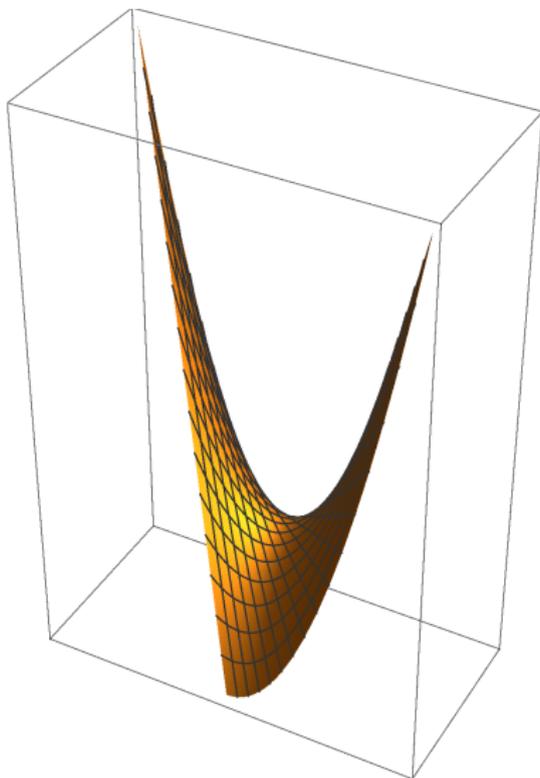
一葉双曲面



双曲放物面



双曲放物面



\mathbb{R}^3 の極小線織面

- \mathbb{R}^3 内の極小な線織面は、平面か常螺旋面の一部であることが知られている (Catalan, 1842)。

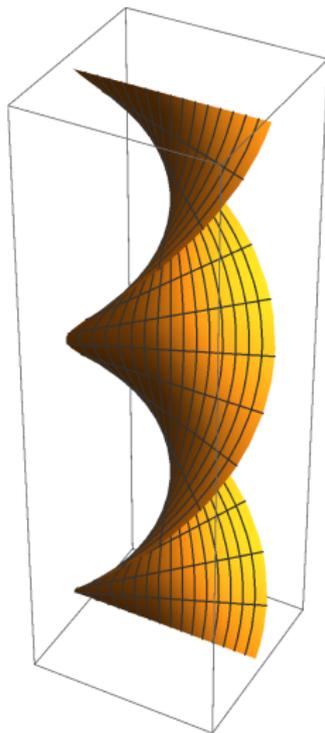
\mathbb{R}^3 の極小線織面

- \mathbb{R}^3 内の極小な線織面は、平面か常螺旋面の一部であることが知られている (Catalan, 1842)。
- この結果は、断面曲率 K が一定の**実空間型** $N^n(K)$:

\mathbb{R}^3 の極小線織面

- \mathbb{R}^3 内の極小な線織面は、平面か常螺旋面の一部であることが知られている (Catalan, 1842)。
- この結果は、断面曲率 K が一定の**実空間型** $N^n(K)$:
- Euclid 空間 \mathbb{R}^n ($K = 0$), 球面 S^n ($K > 0$) と双曲空間 H^n ($K < 0$) 内の**線織部分多様体**に一般化されている (Barbosa-Dajczer-Jorge, Indiana Univ. Math. J., 1984)

常螺旋面



実空間型の線織部分多様体

- $N^n(K)$ の部分多様体 M^{k+1} が線織部分多様体であるとは、

実空間型の線織部分多様体

- $N^n(K)$ の部分多様体 M^{k+1} が線織部分多様体であるとは、
- M 上余次元 1 の葉層構造 (foliation) F が存在して、

実空間型の線織部分多様体

- $N^n(K)$ の部分多様体 M^{k+1} が線織部分多様体であるとは、
- M 上余次元 1 の葉層構造 (foliation) F が存在して、
- F の各 leaf L が $N^n(K)$ の全測地的部分多様体 $N^k(K)$ であることをいう。

実空間型の極小線織部分多様体

- 実空間型 $N^n(K)$ の線織部分多様体 M^{k+1} が極小部分多様体ならば、

実空間型の極小線織部分多様体

- 実空間型 $N^n(K)$ の線織部分多様体 M^{k+1} が極小部分多様体ならば、
- $N^n(K)$ の全測地的部分多様体 $N^k(K)$ を、 $N^n(K)$ の等長変換の 1-parameter 群で動かしたのになっている。

実空間型の極小線織部分多様体

- 実空間型 $N^n(K)$ の線織部分多様体 M^{k+1} が極小部分多様体ならば、
- $N^n(K)$ の全測地的部分多様体 $N^k(K)$ を、 $N^n(K)$ の等長変換の 1-parameter 群で動かしたのになっている。
- 証明のポイントは、線織部分多様体 M^{k+1} の各点で、全測地的 leaf L に直交する方向の単位ベクトル場の積分曲線が、

実空間型の極小線織部分多様体

- 実空間型 $N^n(K)$ の線織部分多様体 M^{k+1} が極小部分多様体ならば、
- $N^n(K)$ の全測地的部分多様体 $N^k(K)$ を、 $N^n(K)$ の等長変換の 1-parameter 群で動かしたのになっている。
- 証明のポイントは、線織部分多様体 M^{k+1} の各点で、全測地的 leaf L に直交する方向の単位ベクトル場の積分曲線が、
- $N^n(K)$ の等長変換の 1-parameter 群の軌道になっていることを示すところにある。

線織部分多様体の一般化

- では、実空間型の線織部分多様体の定義で、葉層構造の余次元を 2 以上にしたらどうか？

線織部分多様体の一般化

- では、実空間型の線織部分多様体の定義で、葉層構造の余次元を 2 以上にしたらどうか？
- 特に、 \mathbb{R}^{n+1} の単位球面 $S^n(1)$ 内の大円 $S^1(1)$ の 2-parameter 族からなる、3次元部分多様体を大域的にはどう構成したらよいか？

線織部分多様体の一般化

- では、実空間型の線織部分多様体の定義で、葉層構造の余次元を 2 以上にしたらどうか？
- 特に、 \mathbb{R}^{n+1} の単位球面 $S^n(1)$ 内の大円 $S^1(1)$ の 2-parameter 族からなる、3次元部分多様体を大域的にはどう構成したらよいか？
- (Foliation の) 余次元が 1 のときには、各 leaf L に直交する方向の積分曲線を見れば、線織部分多様体 M^{k+1} の構造がわかったが、

線織部分多様体の一般化

- では、実空間型の線織部分多様体の定義で、葉層構造の余次元を 2 以上にしたらどうか？
- 特に、 \mathbb{R}^{n+1} の単位球面 $S^n(1)$ 内の大円 $S^1(1)$ の 2-parameter 族からなる、3次元部分多様体を大域的にはどう構成したらよいか？
- (Foliation の) 余次元が 1 のときには、各 leaf L に直交する方向の積分曲線を見れば、線織部分多様体 M^{k+1} の構造がわかったが、
- 余次元が 2 以上の場合は、 L の接空間の直交補空間が作る接分布 (distribution) は、積分可能とは限らない！

線織部分多様体の一般化

- \mathbb{R}^{n+1} の単位球面 $S^n(1)$ 内の大円は、 \mathbb{R}^{n+1} の 2次元部分空間 \mathbb{R}^2 と $S^n(1)$ の共通部分 (切り口) として得られる。

線織部分多様体の一般化

- \mathbb{R}^{n+1} の単位球面 $S^n(1)$ 内の大円は、 \mathbb{R}^{n+1} の 2次元部分空間 \mathbb{R}^2 と $S^n(1)$ の共通部分 (切り口) として得られる。
- ゆえに、 $S^n(1)$ 内の (向きつけられた) 大円の集合 C は、

線織部分多様体の一般化

- \mathbb{R}^{n+1} の単位球面 $S^n(1)$ 内の大円は、 \mathbb{R}^{n+1} の 2次元部分空間 \mathbb{R}^2 と $S^n(1)$ の共通部分 (切り口) として得られる。
- ゆえに、 $S^n(1)$ 内の (向きつけられた) 大円の集合 C は、
- \mathbb{R}^{n+1} 内の (向きつけられた) 2次元部分空間全体のなす **Grassmann 多様体 $G_2(\mathbb{R}^{n+1})$** と同一視できる:

線織部分多様体の一般化

- $C = \{S^1 \subset S^n\} = \{\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^{n+1}\} = G_2(\mathbb{R}^{n+1}).$

線織部分多様体の一般化

- $C = \{S^1 \subset S^n\} = \{\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^{n+1}\} = G_2(\mathbb{R}^{n+1})$.
- そこで、 $G_2(\mathbb{R}^{n+1})$ 内の 2 次元曲面 Σ^2 から、 S^n 内の大円の 2-parameter 族からなる、 S^n の 3 次元部分多様体 M^3 が構成できるはずである。

線織部分多様体の一般化

- $C = \{S^1 \subset S^n\} = \{\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^{n+1}\} = G_2(\mathbb{R}^{n+1})$.
- そこで、 $G_2(\mathbb{R}^{n+1})$ 内の 2 次元曲面 Σ^2 から、 S^n 内の大円の 2-parameter 族からなる、 S^n の 3 次元部分多様体 M^3 が構成できるはずである。
- 具体的には、どうしたらよいか？

Stiefel 多様体

- $V_2(\mathbb{R}^{n+1}) = \{(\mathbf{e}, \mathbf{f}) \in M(n+1, 2, \mathbb{R}) \mid \|\mathbf{e}\| = \|\mathbf{f}\| = 1, \langle \mathbf{e}, \mathbf{f} \rangle = 0\}$ を、 \mathbb{R}^{n+2} の **Stiefel 多様体** とする。

Stiefel 多様体

- $V_2(\mathbb{R}^{n+1}) = \{(\mathbf{e}, \mathbf{f}) \in M(n+1, 2, \mathbb{R}) \mid \|\mathbf{e}\| = \|\mathbf{f}\| = 1, \langle \mathbf{e}, \mathbf{f} \rangle = 0\}$ を、 \mathbb{R}^{n+2} の **Stiefel 多様体** とする。
- $(\mathbf{e}, \mathbf{f}) \in V_2(\mathbb{R}^{n+1})$ に対して、 \mathbf{e} と \mathbf{f} で張られる \mathbb{R}^{n+1} の (oriented) 2次元部分空間 $\text{span}\{\mathbf{e}, \mathbf{f}\}$ を対応させる写像を $\pi : V_2(\mathbb{R}^{n+1}) \rightarrow G_2(\mathbb{R}^{n+1})$ とすると、

Stiefel 多様体

- $V_2(\mathbb{R}^{n+1}) = \{(\mathbf{e}, \mathbf{f}) \in M(n+1, 2, \mathbb{R}) \mid \|\mathbf{e}\| = \|\mathbf{f}\| = 1, \langle \mathbf{e}, \mathbf{f} \rangle = 0\}$ を、 \mathbb{R}^{n+2} の **Stiefel 多様体** とする。
- $(\mathbf{e}, \mathbf{f}) \in V_2(\mathbb{R}^{n+1})$ に対して、 \mathbf{e} と \mathbf{f} で張られる \mathbb{R}^{n+1} の (oriented) 2次元部分空間 $\text{span}\{\mathbf{e}, \mathbf{f}\}$ を対応させる写像を $\pi: V_2(\mathbb{R}^{n+1}) \rightarrow G_2(\mathbb{R}^{n+1})$ とすると、
- $V_2(\mathbb{R}^{n+1})$ は π を射影とする、 $G_2(\mathbb{R}^{n+1})$ 上の、**主 S^1 -束** の全空間であることがわかる。

引き戻し束

- 2次元多様体 Σ^2 から $G_2(\mathbb{R}^{n+1})$ への immersion (はめ込み) $\varphi : \Sigma^2 \rightarrow G_2(\mathbb{R}^{n+1})$ について、

引き戻し束

- 2次元多様体 Σ^2 から $G_2(\mathbb{R}^{n+1})$ への immersion (はめ込み) $\varphi : \Sigma^2 \rightarrow G_2(\mathbb{R}^{n+1})$ について、
- 主 S^1 -束 $(V_2(\mathbb{R}^{n+1}), G_2(\mathbb{R}^{n+1}))$ の引き戻し束を $(\varphi^* V_2(\mathbb{R}^{n+1}), \Sigma^2)$ とする。

引き戻し束

- 2次元多様体 Σ^2 から $G_2(\mathbb{R}^{n+1})$ への immersion (はめ込み) $\varphi : \Sigma^2 \rightarrow G_2(\mathbb{R}^{n+1})$ について、
- 主 S^1 -束 $(V_2(\mathbb{R}^{n+1}), G_2(\mathbb{R}^{n+1}))$ の引き戻し束を $(\varphi^* V_2(\mathbb{R}^{n+1}), \Sigma^2)$ とする。
- また、 $\text{pr}_1 : V_2(\mathbb{R}^{n+1}) \rightarrow S^n$, $\text{pr}_1(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = \mathbf{e}$ を、Stiefel 多様体の元に対してその第一成分を対応させる写像とする。

- このとき、 $M^3 := \varphi^* V_2(\mathbb{R}^{n+1})$ について、次の図式が得られる:

図式

- このとき、 $M^3 := \varphi^* V_2(\mathbb{R}^{n+1})$ について、次の図式が得られる:

-

$$\begin{array}{ccccc} M^3 & \xrightarrow{\eta} & V_2(\mathbb{R}^{n+1}) & \xrightarrow{\text{pr}_1} & S^n \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi & & \\ \Sigma^2 & \xrightarrow{\varphi} & G_2(\mathbb{R}^{n+1}) & & \end{array}$$

図式

- このとき、 $M^3 := \varphi^* V_2(\mathbb{R}^{n+1})$ について、次の図式が得られる:

-

$$\begin{array}{ccccc} M^3 & \xrightarrow{\eta} & V_2(\mathbb{R}^{n+1}) & \xrightarrow{\text{pr}_1} & S^n \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi & & \\ \Sigma^2 & \xrightarrow{\varphi} & G_2(\mathbb{R}^{n+1}) & & \end{array}$$

- ここで η は束写像である。

大円の 2-parameter 族

- このとき、写像 M^3 における $p \in \Sigma$ の各 fiber は、 $\Phi := \text{pr}_1 \circ \eta : M^3 \rightarrow S^n$ によって、

大円の 2-parameter 族

- このとき、写像 M^3 における $p \in \Sigma$ の各 fiber は、 $\Phi := \text{pr}_1 \circ \eta : M^3 \rightarrow S^n$ によって、
- $\varphi(p) \in G_2(\mathbb{R}^{n+1})$ によって定まる S^n の大円にうつる。

大円の 2-parameter 族

- このとき、写像 M^3 における $p \in \Sigma$ の各 fiber は、 $\Phi := \text{pr}_1 \circ \eta : M^3 \rightarrow S^n$ によって、
- $\varphi(p) \in G_2(\mathbb{R}^{n+1})$ によって定まる S^n の大円にうつる。
- ゆえに、 Φ による M^3 の像は、 S^n 内の大円の 2-parameter 族からなる (K. Osaka J. Math., 2000)。

複素射影空間

- $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ において、 $\mathbf{z} \sim \mathbf{w} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}, \mathbf{z} = \lambda \mathbf{w}$ で定義される同値関係による商集合を

複素射影空間

- $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ において、 $\mathbf{z} \sim \mathbf{w} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$,
 $\mathbf{z} = \lambda \mathbf{w}$ で定義される同値関係による商集合を
- **複素射影空間**といい、 $\mathbb{C}P^n$ とかく。

複素射影空間

- $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ において、 $\mathbf{z} \sim \mathbf{w} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$,
 $\mathbf{z} = \lambda \mathbf{w}$ で定義される同値関係による商集合を
- **複素射影空間**といい、 $\mathbb{C}P^n$ とかく。
- $\mathbb{C}P^n$ は \mathbb{C}^{n+1} 内の原点を通る複素直線全体の集合とみなせる。

複素射影空間

- $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ において、 $\mathbf{z} \sim \mathbf{w} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$,
 $\mathbf{z} = \lambda \mathbf{w}$ で定義される同値関係による商集合を
- **複素射影空間** といい、 $\mathbb{C}P^n$ とかく。
- $\mathbb{C}P^n$ は \mathbb{C}^{n+1} 内の原点を通る複素直線全体の集合とみなせる。
- $[\mathbf{z}] \in \mathbb{C}P^n$ に対して、代表元
 $\mathbf{z} = (z_0, z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ を $[\mathbf{z}]$ の**斉次座標** という。

複素二次曲面

- 複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ で、方程式 $z_0^2 + z_1^2 + \cdots + z_n^2 = 0$ で定義される複素超曲面を、

複素二次曲面

- 複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ で、方程式 $z_0^2 + z_1^2 + \cdots + z_n^2 = 0$ で定義される複素超曲面を、
- **複素二次曲面** といい、 Q^{n-1} とかく。

複素二次曲面

- 複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ で、方程式 $z_0^2 + z_1^2 + \cdots + z_n^2 = 0$ で定義される複素超曲面を、
- **複素二次曲面** といい、 Q^{n-1} とかく。
- Q^{n-1} の定義方程式は、 $[z] \in Q^{n-1}$ の斉次座標 z が、 \mathbb{R}^{n+1} の Euclid 内積を複素線形に拡張した複素双 1 次形式について

複素二次曲面

- 複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ で、方程式 $z_0^2 + z_1^2 + \cdots + z_n^2 = 0$ で定義される複素超曲面を、
- **複素二次曲面** といい、 Q^{n-1} とかく。
- Q^{n-1} の定義方程式は、 $[\mathbf{z}] \in Q^{n-1}$ の斉次座標 \mathbf{z} が、 \mathbb{R}^{n+1} の Euclid 内積を複素線形に拡張した複素双 1 次形式について
- **isotropic ベクトル**であることを示している。

Q^{n-1} と $G_2(\mathbb{R}^{n+1})$

- $(\mathbf{e}, \mathbf{f}) \in V_2(\mathbb{R}^{n+1})$ に対して、 $\mathbb{C}P^n$ の元 $[\mathbf{e} + \sqrt{-1}\mathbf{f}]$ は Q^{n-1} に含まれることがわかる。

Q^{n-1} と $G_2(\mathbb{R}^{n+1})$

- $(\mathbf{e}, \mathbf{f}) \in V_2(\mathbb{R}^{n+1})$ に対して、 $\mathbb{C}P^n$ の元 $[\mathbf{e} + \sqrt{-1}\mathbf{f}]$ は Q^{n-1} に含まれることがわかる。
- そして、 $\text{span}\{\mathbf{e}, \mathbf{f}\} \in G_2(\mathbb{R}^{n+1})$ と $[\mathbf{e} + \sqrt{-1}\mathbf{f}] \in Q^{n-1}$ の対応は**全単射**になる。

Q^{n-1} と $G_2(\mathbb{R}^{n+1})$

- $(\mathbf{e}, \mathbf{f}) \in V_2(\mathbb{R}^{n+1})$ に対して、 $\mathbb{C}P^n$ の元 $[\mathbf{e} + \sqrt{-1}\mathbf{f}]$ は Q^{n-1} に含まれることがわかる。
- そして、 $\text{span}\{\mathbf{e}, \mathbf{f}\} \in G_2(\mathbb{R}^{n+1})$ と $[\mathbf{e} + \sqrt{-1}\mathbf{f}] \in Q^{n-1}$ の対応は**全単射**になる。
- 以下、この対応により Q^{n-1} と $G_2(\mathbb{R}^{n+1})$ を**同一視**する。

形作用素

- M を Riemann 多様体 (N, g) の部分多様体、 σ を M の第二基本形式とする。

形作用素

- M を Riemann 多様体 (N, g) の部分多様体、 σ を M の第二基本形式とする。
- M の法ベクトル ν と接ベクトル X, Y について、 $\langle A_\nu X, Y \rangle = \langle \sigma(X, Y), \nu \rangle$ とすると、 A_ν は M の接空間の対称線形変換となる。 A_ν を M の ν に関する形作用素という。

形作用素

- M を Riemann 多様体 (N, g) の部分多様体、 σ を M の第二基本形式とする。
- M の法ベクトル ν と接ベクトル X, Y について、 $\langle A_\nu X, Y \rangle = \langle \sigma(X, Y), \nu \rangle$ とすると、 A_ν は M の接空間の対称線形変換となる。 A_ν を M の ν に関する形作用素という。
- A_ν の (実) 固有値を、 M の ν 方向の主曲率という。

形作用素

- M を Riemann 多様体 (N, g) の部分多様体、 σ を M の第二基本形式とする。
- M の法ベクトル ν と接ベクトル X, Y について、 $\langle A_\nu X, Y \rangle = \langle \sigma(X, Y), \nu \rangle$ とすると、 A_ν は M の接空間の対称線形変換となる。 A_ν を M の ν に関する形作用素という。
- A_ν の (実) 固有値を、 M の ν 方向の主曲率という。
- M が全測地的 \Leftrightarrow すべての ν について $A_\nu = 0$ であり、

形作用素

- M を Riemann 多様体 (N, g) の部分多様体、 σ を M の第二基本形式とする。
- M の法ベクトル ν と接ベクトル X, Y について、 $\langle A_\nu X, Y \rangle = \langle \sigma(X, Y), \nu \rangle$ とすると、 A_ν は M の接空間の対称線形変換となる。 A_ν を M の ν に関する形作用素という。
- A_ν の (実) 固有値を、 M の ν 方向の主曲率という。
- M が全測地的 \Leftrightarrow すべての ν について $A_\nu = 0$ であり、
- M が極小 \Leftrightarrow すべての ν について $\text{trace } A_\nu = 0$ である。

Austere 部分多様体

- M を Riemann 多様体 (N, g) の部分多様体とするとき、

Austere 部分多様体

- M を Riemann 多様体 (N, g) の部分多様体とするとき、
- M のすべての法ベクトル ν について、形作用素の固有値の集合が、 \mathbb{R} の部分集合として (-1) 倍で不変、

Austere 部分多様体

- M を Riemann 多様体 (N, g) の部分多様体とするとき、
- M のすべての法ベクトル ν について、形作用素の固有値の集合が、 \mathbb{R} の部分集合として (-1) 倍で不変、
- すなわち ν 方向の主曲率が $(0$ を含めて) プラス・マイナスのペアとして現れるとき、

Austere 部分多様体

- M を Riemann 多様体 (N, g) の部分多様体とするとき、
- M のすべての法ベクトル ν について、形作用素の固有値の集合が、 \mathbb{R} の部分集合として (-1) 倍で不変、
- すなわち ν 方向の主曲率が $(0$ を含めて) プラス・マイナスのペアとして現れるとき、
- M は N の **austere 部分多様体** という。

\mathbb{C}^{n+1} の special Lagrangian cone

- 特に、 N を Euclid 空間 \mathbb{R}^n あるいは球面 S^n とするとき、

\mathbb{C}^{n+1} の special Lagrangian cone

- 特に、 N を Euclid 空間 \mathbb{R}^n あるいは球面 S^n とするとき、
- N の austere 部分多様体から、複素 Euclid 空間 \mathbb{C}^{n+1} の **special Lagrangian cone** が構成できる (Harvey-Lawson, Acta Math., 1982)

\mathbb{C}^{n+1} の special Lagrangian cone

- 特に、 N を Euclid 空間 \mathbb{R}^n あるいは球面 S^n とするとき、
- N の austere 部分多様体から、複素 Euclid 空間 \mathbb{C}^{n+1} の **special Lagrangian cone** が構成できる (Harvey-Lawson, Acta Math., 1982)
- さらに、Calabi-Yau 多様体 (Ricci-flat Kähler 多様体) の special Lagrangian 部分多様体は、数理論理?で重要である。

\mathbb{C}^{n+1} の special Lagrangian cone

- 特に、 N を Euclid 空間 \mathbb{R}^n あるいは球面 S^n とするとき、
- N の austere 部分多様体から、複素 Euclid 空間 \mathbb{C}^{n+1} の **special Lagrangian cone** が構成できる (Harvey-Lawson, Acta Math., 1982)
- さらに、Calabi-Yau 多様体 (Ricci-flat Kähler 多様体) の special Lagrangian 部分多様体は、数理物理?で重要である。
- Special Lagrangian 部分多様体については、**馬場先生**が研究されています。

Austere 部分多様体の例

- 2次元の極小曲面は austere。

Austere 部分多様体の例

- 2次元の極小曲面は austere。
- 偶数次元 Euclid 空間 \mathbb{R}^{2n} を複素 Euclid 空間 \mathbb{C}^n と同一視するとき、 \mathbb{C}^n の複素部分多様体は austere。

Austere 部分多様体の例

- 2次元の極小曲面は austere。
- 偶数次元 Euclid 空間 \mathbb{R}^{2n} を複素 Euclid 空間 \mathbb{C}^n と同一視するとき、 \mathbb{C}^n の複素部分多様体は austere。
- 球面 S^{n+1} 内の等径超曲面 (主曲率が一定) で、極小であり、 g (異なる主曲率の個数) が 3 か 6, あるいは $g = 4$ で主曲率の重複度がすべて等しい場合は austere。

Austere 部分多様体の例

- 2次元の極小曲面は austere。
- 偶数次元 Euclid 空間 \mathbb{R}^{2n} を複素 Euclid 空間 \mathbb{C}^n と同一視するとき、 \mathbb{C}^n の複素部分多様体は austere。
- 球面 S^{n+1} 内の等径超曲面 (主曲率が一定) で、極小であり、 g (異なる主曲率の個数) が 3 か 6, あるいは $g = 4$ で主曲率の重複度がすべて等しい場合は austere。
- さらに、 S^{n+1} のすべての等径超曲面の focal submanifold は austere。

Austere 線織部分多様体の構成

- 複素 2 次曲面 Q^{n-1} は Hermitian 対称空間で、特に Kähler 多様体、複素多様体である。

Austere 線織部分多様体の構成

- 複素 2 次曲面 Q^{n-1} は Hermitian 対称空間で、特に Kähler 多様体、複素多様体である。
- Σ を Q^{n-1} の複素部分多様体とする。 Σ の任意の接ベクトルを、 $\mathbb{C}P^n (\supset Q^{n-1})$ の斉次座標で表した時、「isotropic」ベクトルであるとき、 Σ は**等方的**であるという。

Austere 線織部分多様体の構成

- 複素 2 次曲面 Q^{n-1} は Hermitian 対称空間で、特に Kähler 多様体、複素多様体である。
- Σ を Q^{n-1} の複素部分多様体とする。 Σ の任意の接ベクトルを、 $\mathbb{C}P^n (\supset Q^{n-1})$ の斉次座標で表した時、「isotropic」ベクトルであるとき、 Σ は**等方的**であるという。
- このとき、前と同様に構成できる Σ 上の S^1 -束 M から球面へのはめ込みによって、 M は S^n の **austere** 部分多様体となる。

Austere 線織部分多様体の構成

- 複素 2 次曲面 Q^{n-1} は Hermitian 対称空間で、特に Kähler 多様体、複素多様体である。
- Σ を Q^{n-1} の複素部分多様体とする。 Σ の任意の接ベクトルを、 $\mathbb{C}P^n (\supset Q^{n-1})$ の斉次座標で表した時、「isotropic」ベクトルであるとき、 Σ は**等方的**であるという。
- このとき、前と同様に構成できる Σ 上の S^1 -束 M から球面へのはめ込みによって、 M は S^n の **austere** 部分多様体となる。
- (Ishikawa, K., Miyaoka, Adv. Stud. Pure Math., 2002)

Austere 部分多様体の結果

- この後、井川・田崎・酒井によって、球面内の austere (あるいは弱鏡映) 軌道に関する結果がある (J. Math. Soc. Japan, 2009)。

Austere 部分多様体の結果

- この後、井川・田崎・酒井によって、球面内の austere (あるいは弱鏡映) 軌道に関する結果がある (J. Math. Soc. Japan, 2009)。
- $\mathbb{C}P^2$ 内の実超曲面 Σ^3 の, Hopf fibration $S^5 \rightarrow \mathbb{C}P^2$ による逆像である、超曲面 $M^4 \subset S^5$ が

Austere 部分多様体の結果

- この後、井川・田崎・酒井によって、球面内の austere (あるいは弱鏡映) 軌道に関する結果がある (J. Math. Soc. Japan, 2009)。
- $\mathbb{C}P^2$ 内の実超曲面 Σ^3 の, Hopf fibration $S^5 \rightarrow \mathbb{C}P^2$ による逆像である、超曲面 $M^4 \subset S^5$ が
- austere となるための条件についての結果も得られた (Cho-K., 2014)。

複素空間形

- Kähler 多様体 (M, g, J) ($J^2 = -id$, 複素構造) において、 $H(X) = g(R(X, JX)JX, X)$ (X は M の単位接ベクトル) を、

複素空間形

- Kähler 多様体 (M, g, J) ($J^2 = -id$, 複素構造) において、 $H(X) = g(R(X, JX)JX, X)$ (X は M の単位接ベクトル) を、
- X と JX で張られる平面の**正則断面曲率**という。

複素空間形

- Kähler 多様体 (M, g, J) ($J^2 = -id$, 複素構造) において、 $H(X) = g(R(X, JX)JX, X)$ (X は M の単位接ベクトル) を、
- X と JX で張られる平面の**正則断面曲率**という。
- M が単連結完備で、正則断面曲率が M の点 x にも単位接ベクトル X にもよらないとき、

複素空間形

- Kähler 多様体 (M, g, J) ($J^2 = -id$, 複素構造) において、 $H(X) = g(R(X, JX)JX, X)$ (X は M の単位接ベクトル) を、
- X と JX で張られる平面の**正則断面曲率**という。
- M が単連結完備で、正則断面曲率が M の点 x にも単位接ベクトル X にもよらないとき、
- M は複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ ($H > 0$), 複素 Euclid 空間 \mathbb{C}^n ($H = 0$), 複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n$ ($H < 0$) のいずれかである。

複素空間形

- Kähler 多様体 (M, g, J) ($J^2 = -id$, 複素構造) において、 $H(X) = g(R(X, JX)JX, X)$ (X は M の単位接ベクトル) を、
- X と JX で張られる平面の**正則断面曲率**という。
- M が単連結完備で、正則断面曲率が M の点 x にも単位接ベクトル X にもよらないとき、
- M は複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ ($H > 0$), 複素 Euclid 空間 \mathbb{C}^n ($H = 0$), 複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n$ ($H < 0$) のいずれかである。
- これらの空間を**複素空間形**という。

複素双曲空間

- $\mathbf{z} = (z_0, z_1, \dots, z_n)$ と
 $\mathbf{w} = (w_0, w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ に対して、

複素双曲空間

- $\mathbf{z} = (z_0, z_1, \dots, z_n)$ と
 $\mathbf{w} = (w_0, w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ に対して、
- 指数 1 の Hermite 形式
 $(\mathbf{z}, \mathbf{w})_1 = -z_0 \bar{w}_0 + z_1 \bar{w}_1 + \dots + z_n \bar{w}_n$ を考える。

複素双曲空間

- $\mathbf{z} = (z_0, z_1, \dots, z_n)$ と
 $\mathbf{w} = (w_0, w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ に対して、
- 指数 1 の Hermite 形式
 $(\mathbf{z}, \mathbf{w})_1 = -z_0 \bar{w}_0 + z_1 \bar{w}_1 + \dots + z_n \bar{w}_n$ を考える。
- この実部 $\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = \operatorname{Re}(\mathbf{z}, \mathbf{w})_1$ は、 \mathbb{C}^{n+1} の指数 2 の実双一時形式である。

複素双曲空間

- $\mathbf{z} = (z_0, z_1, \dots, z_n)$ と
 $\mathbf{w} = (w_0, w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ に対して、
- 指数 1 の Hermite 形式
 $(\mathbf{z}, \mathbf{w})_1 = -z_0 \bar{w}_0 + z_1 \bar{w}_1 + \dots + z_n \bar{w}_n$ を考える。
- この実部 $\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = \operatorname{Re}(\mathbf{z}, \mathbf{w})_1$ は、 \mathbb{C}^{n+1} の指数 2 の実双一時形式である。
- \mathbb{C}^{n+1} とこの不定値内積の組みを \mathbb{C}_1^{n+1} と書く。

複素双曲空間

- \mathbb{C}_1^{n+1} の超曲面 $H_1^{2n+1} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}_1^{n+1} \mid \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = -1\}$ は、誘導計量について、指数 1 で定曲率 -1 の疑 Riemann 計量をもち、

複素双曲空間

- \mathbb{C}_1^{n+1} の超曲面 $H_1^{2n+1} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}_1^{n+1} \mid \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = -1\}$ は、誘導計量について、指数 1 で定曲率 -1 の疑 Riemann 計量をもち、
- $2n + 1$ 次元 **anti de-Sitter 空間** とよばれる。

複素双曲空間

- \mathbb{C}_1^{n+1} の超曲面 $H_1^{2n+1} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}_1^{n+1} \mid \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = -1\}$ は、誘導計量について、指数 1 で定曲率 -1 の疑 Riemann 計量をもち、
- $2n + 1$ 次元 **anti de-Sitter 空間** とよばれる。
- この空間を、 \mathbb{C}_1^{n+1} への単位複素数 $S^1 = \{e^{i\theta}\}$ の作用で割った空間が、

複素双曲空間

- \mathbb{C}_1^{n+1} の超曲面 $H_1^{2n+1} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}_1^{n+1} \mid \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = -1\}$ は、誘導計量について、指数 1 で定曲率 -1 の疑 Riemann 計量をもち、
- $2n + 1$ 次元 **anti de-Sitter 空間** とよばれる。
- この空間を、 \mathbb{C}_1^{n+1} への単位複素数 $S^1 = \{e^{i\theta}\}$ の作用で割った空間が、
- **複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n$** である。

複素双曲空間

- 射影 $\pi : H_1^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}H^n$ が疑 Riemann submersion となるように $\mathbb{C}H^n$ に計量をいれると、

複素双曲空間

- 射影 $\pi : H_1^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}H^n$ が疑 Riemann submersion となるように $\mathbb{C}H^n$ に計量をいれると、
- $\mathbb{C}H^n$ は正則断面曲率が -4 の複素空間形となる。

複素双曲空間

- 射影 $\pi : H_1^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}H^n$ が疑 Riemann submersion となるように $\mathbb{C}H^n$ に計量をいれると、
- $\mathbb{C}H^n$ は正則断面曲率が -4 の複素空間形となる。
- $\mathbb{C}H^n$ の全測地的部分多様体は、 $\mathbb{C}H^k$ ($1 \leq k \leq n-1$, 複素部分多様体)、 $\mathbb{R}H^n$ (Lagrangian 部分多様体)、 $\mathbb{R}H^k$ ($1 \leq k \leq n-1$, 全実部分多様体) のいずれかである。

複素空間形の実超曲面

- $\widetilde{M}^n(c)$ を、正則断面曲率が c の複素 n 次元複素空間形、 M^{2n-1} をその中で実次元が 1 だけ小さい、実 $2n-1$ 次元**実超曲面**とする。

複素空間形の実超曲面

- $\tilde{M}^n(c)$ を、正則断面曲率が c の複素 n 次元複素空間形、 M^{2n-1} をその中で実次元が 1 だけ小さい、実 $2n-1$ 次元**実超曲面**とする。
- 例としては、 $\tilde{M}^n(c)$ 内の 1 点を始点とする測地線で、一定の距離 $r > 0$ だけ進んだ点の集合、**測地的超球面**がある。

複素空間形の実超曲面

- $\tilde{M}^n(c)$ を、正則断面曲率が c の複素 n 次元複素空間形、 M^{2n-1} をその中で実次元が 1 だけ小さい、実 $2n-1$ 次元**実超曲面**とする。
- 例としては、 $\tilde{M}^n(c)$ 内の 1 点を始点とする測地線で、一定の距離 $r > 0$ だけ進んだ点の集合、**測地的超球面**がある。
- 複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ の**等質**実超曲面は、階数 2 Hermitian 対称空間の isotropy 表現の軌道として得られる (高木、Osaka J. Math., 1970)

複素空間形の実超曲面

- $\tilde{M}^n(c)$ を、正則断面曲率が c の複素 n 次元複素空間形、 M^{2n-1} をその中で実次元が 1 だけ小さい、実 $2n-1$ 次元**実超曲面**とする。
- 例としては、 $\tilde{M}^n(c)$ 内の 1 点を始点とする測地線で、一定の距離 $r > 0$ だけ進んだ点の集合、**測地的超球面**がある。
- 複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ の**等質**実超曲面は、階数 2 Hermitian 対称空間の isotropy 表現の軌道として得られる (高木、Osaka J. Math., 1970)
- その特徴付け:(K. Trans. Amer. Math. Soc., 1986)。

複素空間形の線織実超曲面

- 複素空間形 \widetilde{M}^n の実超曲面 M^{2n-1} について、各点 p に接空間の $(2n-2)$ 次元部分空間 $T_pM \cap J(T_pM)$ を対応させる接分布が積分可能であって、

複素空間形の線織実超曲面

- 複素空間形 \tilde{M}^n の実超曲面 M^{2n-1} について、各点 p に接空間の $(2n-2)$ 次元部分空間 $T_p M \cap J(T_p M)$ を対応させる接分布が積分可能であって、
- その各 leaf が \tilde{M}^n の全測地的複素超曲面 \tilde{M}^{n-1} であるとき、

複素空間形の線織実超曲面

- 複素空間形 \tilde{M}^n の実超曲面 M^{2n-1} について、各点 p に接空間の $(2n-2)$ 次元部分空間 $T_p M \cap J(T_p M)$ を対応させる接分布が**積分可能**であって、
- その各 leaf が \tilde{M}^n の全測地的複素超曲面 \tilde{M}^{n-1} であるとき、
- **線織実超曲面**という。

複素空間形の線織実超曲面

- 複素空間形 \tilde{M}^n の実超曲面 M^{2n-1} について、各点 p に接空間の $(2n-2)$ 次元部分空間 $T_p M \cap J(T_p M)$ を対応させる接分布が**積分可能**であって、
- その各 leaf が \tilde{M}^n の全測地的複素超曲面 \tilde{M}^{n-1} であるとき、
- **線織実超曲面**という。
- 複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ の場合は、線織実超曲面 M^{2n-1} は、完備ではなくて必ず特異点をもつ (K. Math. Ann. 1987)。

複素双曲空間の線織実超曲面

- 一方、複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n$ の線織実超曲面 M^{2n-1} については、**等質** (したがって**完備**) なものが存在する (Lohnherr-Reckziegel, Geom. Dedicata, 1999)。

複素双曲空間の線織実超曲面

- 一方、複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n$ の線織実超曲面 M^{2n-1} については、**等質** (したがって**完備**) なものが存在する (Lohnherr-Reckziegel, Geom. Dedicata, 1999)。
- (さらに、 $\mathbb{C}H^n$ の**極小**な線織実超曲面を分類している)

複素双曲空間の線織実超曲面

- 一方、複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n$ の線織実超曲面 M^{2n-1} については、等質 (したがって完備) なものが存在する (Lohnherr-Reckziegel, Geom. Dedicata, 1999)。
- (さらに、 $\mathbb{C}H^n$ の極小な線織実超曲面を分類している)
- その意味で、 $\mathbb{C}H^n$ の線織実超曲面は、興味深い対象である!?

複素双曲空間の線織実超曲面

- 一方、複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n$ の線織実超曲面 M^{2n-1} については、**等質** (したがって**完備**) なものが存在する (Lohnherr-Reckziegel, Geom. Dedicata, 1999)。
- (さらに、 $\mathbb{C}H^n$ の**極小**な線織実超曲面を分類している)
- その意味で、 $\mathbb{C}H^n$ の線織実超曲面は、興味深い対象である!?
- 複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n$ の線織実超曲面 M^{2n-1} は、 $\mathbb{C}H^n$ の全測地的 $\mathbb{C}H^{n-1}$ の 1-parameter 族からなるが、

複素双曲空間の線織実超曲面



$$\{\mathbb{C}H^{n-1} \subset \mathbb{C}H^n\} \cong \{\mathbb{C}_1^n \subset \mathbb{C}_1^{n+1}\} \cong \{\mathbb{C}^1 \subset \mathbb{C}_1^{n+1}\}$$

より、

複素双曲空間の線織実超曲面



$$\{\mathbb{C}H^{n-1} \subset \mathbb{C}H^n\} \cong \{\mathbb{C}_1^n \subset \mathbb{C}_1^{n+1}\} \cong \{\mathbb{C}^1 \subset \mathbb{C}_1^{n+1}\}$$

より、

- 複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n$ の線織実超曲面 M^{2n-1} は、 \mathbb{C}_1^{n+1} 内の空間的複素直線全体のなす、不定値複素射影空間 $\mathbb{C}P_1^n$ 内の (実 1 次元) 曲線 C と対応する。

複素双曲空間の線織実超曲面

- ここで、 $\mathbb{C}P_1^n$ は複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n$ と同様に、 \mathbb{C}_1^{n+1} 内の超曲面 $S_2^{2n+1} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}_1^{n+1} \mid \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = 1\}$ を S^1 の作用で割った空間として得られて、

複素双曲空間の線織実超曲面

- ここで、 $\mathbb{C}P_1^n$ は複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n$ と同様に、 \mathbb{C}_1^{n+1} 内の超曲面 $S_2^{2n+1} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}_1^{n+1} \mid \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = 1\}$ を S^1 の作用で割った空間として得られて、
- 正則断面曲率が 4 の不定値複素空間形である。

複素双曲空間の線織実超曲面

- ここで、 $\mathbb{C}P_1^n$ は複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n$ と同様に、 \mathbb{C}_1^{n+1} 内の超曲面 $S_2^{2n+1} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}_1^{n+1} \mid \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = 1\}$ を S^1 の作用で割った空間として得られて、
- 正則断面曲率が 4 の不定値複素空間形である。
- 等質空間としての表示は、 $\mathbb{C}H^n = U(n, 1)/U(n) \times U(1)$,
 $\mathbb{C}P_1^n = U(n, 1)/U(n-1, 1) \times U(1)$ である。

定理 1

- M^{2n-1} を複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n$ の線織実超曲面で、 C を対応する $\mathbb{C}P_1^n$ の曲線とする。

定理 1

- M^{2n-1} を複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n$ の線織実超曲面で、 C を対応する $\mathbb{C}P_1^n$ の曲線とする。
- このとき、 M が極小であるための必要十分条件は、

定理 1

- M^{2n-1} を複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n$ の線織実超曲面で、 C を対応する $\mathbb{C}P_1^n$ の曲線とする。
- このとき、 M が極小であるための必要十分条件は、
- C が $\mathbb{C}P_1^n$ の測地線となることである。

定理 1

- $\mathbb{C}P_1^n$ の測地線は、その速度ベクトル $\gamma'(s)$ の causal character によって、

定理 1

- $\mathbb{C}P_1^n$ の測地線は、その速度ベクトル $\gamma'(s)$ の causal character によって、
- **空間的** $\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle > 0$, **光的**
 $\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = 0$, **時間的** $\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle < 0$ の

定理 1

- $\mathbb{C}P_1^n$ の測地線は、その速度ベクトル $\gamma'(s)$ の causal character によって、
- **空間的** $\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle > 0$, **光的** $\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = 0$, **時間的** $\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle < 0$ の
- **3つのタイプ**に分かれるが、対応して $\mathbb{C}H^n$ の極小線織実超曲面も3つのタイプに分かれる。

定理 2

- M^{2n-1} を (正則断面曲率が -4 の) 複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n$ の線織実超曲面で、 C を対応する $\mathbb{C}P_1^n$ の曲線とする。

定理 2

- M^{2n-1} を (正則断面曲率が -4 の) 複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n$ の線織実超曲面で、 C を対応する $\mathbb{C}P_1^n$ の曲線とする。
- このとき、 M のスカラー曲率 s が一定であるための必要十分条件は、

定理 2

- M^{2n-1} を (正則断面曲率が -4 の) 複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n$ の線織実超曲面で、 C を対応する $\mathbb{C}P_1^n$ の曲線とする。
- このとき、 M のスカラー曲率 s が一定であるための必要十分条件は、
- C が $\mathbb{C}P_1^n$ の光的曲線となることである。

定理 2

- M^{2n-1} を (正則断面曲率が -4 の) 複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n$ の線織実超曲面で、 C を対応する $\mathbb{C}P_1^n$ の曲線とする。
- このとき、 M のスカラー曲率 s が一定であるための必要十分条件は、
- C が $\mathbb{C}P_1^n$ の光的曲線となることである。
- そして、この場合スカラー曲率は $s = -4n^2 + 2$ となる。

$\mathbb{C}H^n$ の線織実超曲面

- 定理 2 をみたく $\mathbb{C}P_1^n$ の曲線 C や $\mathbb{C}H^n$ の線織実超曲面は、無数にたくさんある!?

$\mathbb{C}H^n$ の線織実超曲面

- 定理 2 をみたく $\mathbb{C}P_1^n$ の曲線 C や $\mathbb{C}H^n$ の線織実超曲面は、無数にたくさんある!?
- 定理 1 と定理 2 の両方を見たくのが、

$\mathbb{C}H^n$ の線織実超曲面

- 定理 2 をみたく $\mathbb{C}P_1^n$ の曲線 C や $\mathbb{C}H^n$ の線織実超曲面は、無数にたくさんある!?
- 定理 1 と定理 2 の両方をみたくのが、
- $\mathbb{C}H^n$ の極小かつ等質な線織実超曲面である。

$\mathbb{C}H^n$ の線織実超曲面

- 定理 2 をみたく $\mathbb{C}P_1^n$ の曲線 C や $\mathbb{C}H^n$ の線織実超曲面は、無数にたくさんある!?
- 定理 1 と定理 2 の両方をみたくのが、
- $\mathbb{C}H^n$ の極小かつ等質な線織実超曲面である。
- $\mathbb{C}H^n$ の線織実超曲面に関する結果は、前田氏 (佐賀大) と田邊氏 (松江高専) の共同研究である (準備中)。