「研究紹介」

木村　真琴（理工学研究科（理学野）数学・情報数理領域 教授）

私の専門分野は「微分幾何学」です。そして、主要な研究テーマの一つである「複素射影空間の実超曲面」には、埼玉大学大学院の修士課程で奥村正文先生の御指導の中で出会いました。ここでは、この内容と関連する「等径超曲面」について述べさせていただきたいと思います。ちなみに、院の入試の面接で奥村先生が開口一番「あなたはお酒を飲めますか？」と聞かれて、「はい」と答えたのが入学の決めて!?になったのかもしれない、ということはここだけの話です!?

1 変数関数 $y=f(x)$ のグラフが「曲線」、2 変数関数 $z=f(x,y)$ のグラフが「曲面」の典型的な例ですが、それらを高次元に一般化した「多様体」が微分幾何学の研究対象になります。n 個の実数の組全体の集合である n 次元ユークリッド空間 R^n の部分集合(正確には開集合)を貼り合わせてできるものが「n 次元多様体」M^n です。このとき、1 変数関数のグラフの「接線」や 2 変数関数のグラフの「接平面」の一般化として、多様体の各点における「接空間」が定義されて、n 次元実ベクトル空間になります。そして、多様体の各点の接空間に「内積」を与えたものをリーマン計量と言い、g で表します。このような多様体を「リーマン多様体」と言って「リーマン幾何学」の研究対象になります。アインシュタインが「一般相対性理論」を構成したときにも、リーマン幾何学が基になりました。特に、2 次元多様体である平面 R^2 については、各点の接空間と平面自身が同一視できて、リーマン計量も平面の通常の内積から自然に定義できます。このとき、平面の「平行移動」と「原点中心の回転」は、それぞれ R^2 の計量を保ち、それらの合成写像全体が「群」を作ることがわかります。これを R^2 の「等長変換群」$I(R^2)$と言います。一般のリーマン多様体 (M,g) についても、計量を保つ M の変換全体が作る「等長変換群」$I(M)$を考えることができて、「群」かつ「多様体」である「リー群」になります。平面 R^2 の場合には、等長変換群 $I(R^2)$は、平行移動の 2 次元分と回転の 1 次元分の併せて 3 次元リー群になります。一般のリーマン多様体(M,g)において、等長変換群 $I(M)$の最大次元は $n(n+1)/2$ であって、その時のリーマン多様体 (M,g) は「断面曲率」K が一定の「定曲率空間」であることがわかります。特に K が 0 であるのがユークリッド空間 R^n, K が正の定数になるのが n 次元「球面」S^n, K が負の定数となるのが n 次元「双曲空間」H^n であって、後の 2 つは「非ユークリッド幾何学」のモデルに他なりません。これらは、最も美しいリーマン多様体である、と言っても過言ではないでしょう。また、定曲率空間 M では任意の 2 点 p,q について、p を q にうつす等張変換が存在します。このことを、M は「等質空間である」といいます。例として、R^3 の中の「円柱」$R\times S^1$ は、等質空間ですが、定曲率空間ではありません。次に、n 次元多様体 M^n の部分集合でそれ自身が n-1 次元多様体になるものを M の「超曲面」と言い、例えばユークリッド空間 R^n の超平面 R^{n-1} や n 次元球面 S^{n-1} はその

例になります。多様体の超曲面について、各点の接空間に直交する「単位法線ベクトル」N を取ることができて、N の変化の様子を調べることにより、超曲面を外から見たときの曲がり具合を調べることができます。この情報を表すのが超曲面の各点の接空間上の(対称な)線形変換である「形作用素」A であって、その(実数である)固有値 k_1,…,k_{n-1}を超曲面の(各点における)「主曲率」と言い、それぞれ M 上の関数になります。例えば、(1) R^3 の平面 R^2 については、単位法線ベクトル N が変化しないので、主曲率 k_1 と k_2 は 0, (2) R^3 の球面 S^2 については曲がり具合が一定なので 2 つの主曲率は 0 でない定数で、(3) R^3 の円柱の主曲率は、直線方向の主曲率 0 と円周方向の 0 でない定数 k の 2 個です。これらの例の一般化として、定曲率空間内の超曲面 M で、そのすべての主曲率が M 上一定であるものを「等径超曲面」といい、100 年以上研究されてきました。外の定曲率空間がユークリッド空間 R^n や双曲空間 H^n の場合、等径超曲面はすぐに分類されたのですが、球面 S^n の場合がとても興味深いものでした。例えば、(a) S^n の等径超曲面は R^{n+1} の代数方程式の零点集合と S^n の共通部分として得られる。(b) S^n の等径超曲面の異なる主曲率の個数は 1,2,3,4,6 のいずれかである、ということがミュンツナーによって明らかにされましたし、特に後者についてはトポロジーの議論を用いて初めてわかりました。そして、S^n の等径超曲面は等質空間しかないのではないかと予想されていましたが、1980 年に尾関と竹内が等質でない S^n の等径超曲面を初めて発見しました、彼らの結果は微分幾何学における歴史的な業績と言えるでしょう。

1984 年に私は都立大の大学院博士課程に入学しましたが、その年に次の定理を証明しました：複素多様体として曲率が正の定曲率空間である(多様体としては 2n 次元の)「複素射影空間」CP^n の実超曲面 M^{2n-1}について、主曲率が一定であってかつ M の構造ベクトル場 JN が形作用素 A の固有ベクトルであることと、実超曲面 M が等質空間であることが同値である。ここで、J は複素射影空間の「複素構造」で、複素数平面 C において虚数単位 i をかけると、ベクトルが 90 度回転するような変換に相当します。この定理を証明するカギになったのは、修士のゼミで読んだ Cecil-Ryan の論文、学部 4 年のゼミで読んだ J.Simons の「極小部分多様体」の論文、高木亮一先生の実超曲面に関する先行研究と、球面の等径超曲面に関する理論でした。Simons は著名な幾何学者でしたがその後トレーディングの世界に転身し、膨大な資産を築き上げました。詳しくは、彼の評伝「最も賢い億万長者〈上・下〉 数学者シモンズはいかにしてマーケットを解読したか」(ダイアモンド社)に書いてありますが、面白いと思います。Cecil-Ryan の論文については、博士課程に入って先輩の清水さんに声をかけてもらって 2 人によるゼミで詳細に論文を読み直したのが大きかったです。そして、定理のキモの部分を夜中に計算し、証明できた時には嬉しくて朝まで眠れませんでした。残念ながらその後そこまで数学で感動したことはありません。指導教員だった荻上先生に論文の英語を添削してもらい、送った論文は Cecil-Ryan の論文と同じアメリカ数学会の雑誌に掲載され、多くの人々に引用もされましたし、今日まで数学を続けて

来られました。その後、最近ではそのような実超曲面と複素 2 平面グラスマン多様体の四元数ケーラー構造に関するツイスター空間との関わりが見えてきましたし、もう一つのライフワーク!?である「線織面の一般化」については、遅まきながらファイバー束の有難みがわかってきました。元々「数学者」という存在も分かっていなかったし、自分如きが数学者に成れるなんて夢にも思っていませんでしたが、多くの方々のお陰で数学に携わってくることができました。また、本稿を書くきっかけを頂いた中井先生に感謝します。