

Thomas E. Cecil and Patrick J. Ryan: Geometry of Hypersurfaces 書評

木村真琴

Springer, 2015 年, xi+596 ページ.

本書は、(断面曲率が一定である) 実空間形、(正則断面曲率が一定である) 複素空間形および四元数空間形内の超曲面の微分幾何学に関して、最近までの研究をまとめたものであり、特に実空間形内の等径超曲面と Dupin 超曲面、および複素空間形内の Hopf 超曲面について詳しく述べられている。著者の一人の T.E. Cecil は、S.S. Chern との共著論文 [1] や、球面内の等径超曲面の分類に関して決定的な役割を果たしている論文 [2] など優れた研究を行ってきた一方、もう一人の P.J. Ryan は 60 年台終わりから現在まで活発に研究を行なっている。本書の著者両氏の博士論文の advisor は野水克己氏であって、野水氏の advisor は S.S. Chern である。

1 章「Introduction」に続いて、2 章「実空間形内の部分多様体」では本書に必要な基本的概念が述べられている。実空間形 \widetilde{M} に埋め込まれた部分多様体 M を考える。 \widetilde{M} の指数写像 $\exp : T\widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$ を M の法束 NM に制限した写像 $E : NM \rightarrow \widetilde{M}$ を法指数写像、あるいは終点写像といい、 E の臨界値を M の focal point という。 \mathbf{R}^3 内の球面の focal point の集合は中心の一点集合で、円柱の focal point の集合は円柱の中心線である。余次元が 1 より大きい部分多様体 M の単位法ベクトル束 BM と $t > 0$ について、 $f_t(x, \xi) = E(x, t\xi)$ で定義される写像 $f_t : BM \rightarrow \widetilde{M}$ を、 M 上半径 $t > 0$ の tube という。 \mathbf{R}^3 の一点集合上の tube は球面であり、直線上の tube は円柱である。同様に、 \widetilde{M} 内の超曲面に対して、平行超曲面が定義されて、 \mathbf{R}^3 内の円柱の平行超曲面は、中心線を共有する半径の異なる円柱である。 \mathbf{R}^m 内の部分多様体は、 \mathbf{R}^m の単位ベクトルに関する高さ函数 (あるいは 1 点からの距離函数) が完全 Morse 函数のとき tight (あるいは taut) というが、それらについては彼らの以前の著書 [5] にも詳しく述べられている。

3 章「等径超曲面」では、本書の主なテーマの 1 つである実空間形、特に球面内の等径超曲面について述べられている。まず実空間形 \widetilde{M} 内の超曲面 M について、以下の 3 条

件は同値であることが示される: (a) M は \widetilde{M} 上のある等径函数 F の level set, (b) M の平行超曲面の族 M_t ($-\varepsilon < t < \varepsilon$) はすべて平均曲率が一定, (c) M の主曲率が一定。ここで、 \widetilde{M} 上の定数でない実数値可微分函数 F は、 $|\text{grad } F|^2$ と ΔF が F の各 level set において一定であるとき等径であるという。一般の Riemann 多様体内の超曲面についても (a) と (b) の同値性は成り立つが、その場合でも (c) が成り立つとは限らない。等径超曲面は 100 年前に Somigliana [14] が研究を初め、Segre や Levi-Civita が続いたが、Élie Cartan は断面曲率が定数 c である実空間形 $\widetilde{M}(c)$ の等径超曲面 M について、「Cartan の恒等式」を見出した: $\lambda_1, \dots, \lambda_g$ を異なる (一定の) 主曲率、 m_1, \dots, m_g をそれらの重複度で、 g を異なる主曲率の個数で $g > 1$ とするとき、

$$\sum_{j \neq i} m_j \frac{c + \lambda_i \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} = 0. \quad (1)$$

これを用いて、実空間形が Euclid 空間 \mathbf{R}^{n+1} (および実双曲空間 H^{n+1}) のとき、 $g \leq 2$ であって M は超平面 \mathbf{R}^n , 超球面 S^n か $S^k \times \mathbf{R}^{n-k}$ の一部であることが示される (H^{n+1} の場合も同様)。しかしながら、実空間形が球面 S^{n+1} の場合には Cartan の恒等式から $g \leq 2$ は結論されず、Cartan は $g = 1, 2, 3, 4$ の例を構成し、 $g \leq 3$ の場合の等径超曲面を分類した: $g = 1$ のときは超球面 S^n , $g = 2$ のときは球面の積 $S^p \times S^{n-p}$, $1 \leq p \leq n-1$ であって、 $g = 3$ のときは斜体 $\mathbf{F} = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}, \mathbf{O}$ に関する射影平面 \mathbf{FP}^2 を球面 S^{n+1} ($n = 3, 6, 12, 24$) に標準的に埋め込んだ部分多様体上の tube である (Cartan 超曲面ともよばれる)。また、 $g = 4$ のときに、Cartan はすべての主曲率の重複度が 1 と 2 である S^5 と S^9 の等径超曲面も構成した。さらに Cartan は、自身が得た等径超曲面の例はすべて等質であって、 $SO(n+2)$ の閉部分群の軌道になっていることも述べている。

球面 S^{n+1} 内の等径超曲面 M^n の研究は、70 年台に入って野水が M^n の focal 部分多様体は極小であることなど示した後、Münzner [11] によって大きく進展した。(i) M^n を S^{n+1} 内の連結等径超曲面で g 個の主曲率 $\lambda_i = \cot \theta_i$, $0 < \theta_1 < \dots < \theta_g < \pi$, を持ち、それらの重複度を m_i とすると、

$$\theta_i = \theta_1 + (i-1) \frac{\pi}{g} \quad (1 \leq i \leq g), \quad m_i \equiv m_{i+2} \pmod{g}. \quad (2)$$

(ii) 球面 S^{n+1} 内の等径超曲面 M^n は \mathbf{R}^{n+2} 上の次数 g の斉次多項式 F (Cartan-Münzner 多項式という) で、以下の微分方程式をみたすものを S^{n+1} に制限した函数の level set (の open subset) である:

$$|\text{grad } F|^2 = g^2 r^{2g-2}, \quad \Delta F = cr^{g-2}, \quad (3)$$

ここで $r = |x|$, $c = g^2(m_2 - m_1)/2$ 。(iii) さらに、 S^{n+1} 内の compact 等径超曲面 M^n について、 S^{n+1} がその 2 つの focal 部分多様体 M_+ と M_- 上の ball bundle に分解することから、微分トポロジーを用いて、 g の取りうる値は 1, 2, 3, 4 または 6 であることを示した。

一方で S^{n+1} 内の等質超曲面はすべて等径超曲面であるが、それらはすべて階数 2 の Riemann 対称空間の isotropy 表現の軌道として得られることが Hsiang-Lawson および高木-高橋によって示された。そして、驚くべきことに S^{n+1} の「非等質」な $g = 4$ の等径超曲面が、Münzner の結果を用いて尾関-竹内 [13] によって構成された。これらは、後に Ferus-Karcher-Münzner [7] によって Clifford 代数の表現を用いて一般化されていて、本書でも「FKM-type」の等径超曲面とよばれているが、最近では先駆者にちなんで「OT-FKM type」とよばれるようになってきている。その後、Abresch, Stolz, Dorfmeister-Neher に加えて、冒頭に述べた Chi-Cecil-Jensen や Immervoll, 宮岡礼子氏達によって $g = 4, 6$ の等径超曲面の研究が進み、Q.-S. Chi によって球面内の等径超曲面の分類:

S^{n+1} 内の等径超曲面は等質超曲面か OT-FKM type の非等質超曲面に限る

が完成した旨の announce がなされたが、本文執筆時 (2017 年 4 月) 現在ではまだ publish はされていないようである。さらに、Ge-Tang (Exotic sphere) や Ma-大仁田 (Lagrange 部分多様体) など、Riemann 幾何への様々な応用も得られている。このように、微分幾何に加えて微分トポロジー、K-理論、表現論、可換環論、代数幾何などを駆使して研究されてきた球面内の等径超曲面は、極めて興味深い研究対象と言えよう。

4 章「Lie 球面幾何における部分多様体」と 5 章「Dupin 超曲面」の 2 章については、Cecil による本 [3] に重なる部分も多い。まず、Möbius 幾何と Lie 球面幾何について述べられている。実空間形 \widetilde{M}^{n+1} 内の超曲面 M^n は、各々の主曲率とその主曲率方向に一定であるとき Dupin であるという。主曲率の重複度が 2 以上のときには、Codazzi 方程式よりその条件は自動的に満たされるので、重複度が 1 のときが本質的である。さらに、異なる主曲率の個数 g が M 上一定であるとき、proper Dupin という。これらの性質は、Möbius 変換あるいは Lie 球面変換の下で保たれる。そして、等径超曲面の場合と異なり (proper) Dupin 超曲面については局所的性質と大域的性質は異なっている。 S^{n+1} 内の compact proper Dupin 超曲面については、等径超曲面と同じく $g = 1, 2, 3, 4, 6$ であることが Thobergsson によって示されている一方で、Pinkall は non-compact proper Dupin 超曲面で、任意の異なる主曲率の個数 g と、任意の重複度をもつものを構成している。

6 章「複素空間形内の実超曲面」7 章「 CP^n と CH^n 内の複素部分多様体」8 章「Hopf

超曲面」について: \mathbf{C}^n , および複素多様体内の実超曲面は、多変数複素函数論の立場から Levi, 田中, Chern-Moser 達によって「CR 幾何」として研究されてきたが、超曲面論的にも (本書には引用されていないが)70 年代初めの Lawson [10] を初めとして盛んに研究されてきた。この 3 つの章では、複素射影空間 $\mathbf{C}\mathbf{P}^n$ および複素双曲空間 $\mathbf{C}\mathbf{H}^n$ 内の実余次元 1 の超曲面、特に Hopf 超曲面について述べられている。 M^{2n-1} を $\mathbf{C}\mathbf{P}^n$ あるいは $\mathbf{C}\mathbf{H}^n$ 内の実超曲面、 ξ を M の単位法ベクトル場とする。 \widetilde{M} の複素構造 J について、 M の接ベクトル $W = -J\xi$ が主曲率ベクトル、すなわち shape operator $A : TM \rightarrow TM$ の固有ベクトルであるとき、 M を Hopf 超曲面とよぶ。このとき、その固有値 (Hopf 主曲率) μ は M 上 (局所) 定数であることが知られている。 $\mathbf{C}\mathbf{P}^n$ 内の等質実超曲面は高木 [15] によって分類され、それらはすべて階数 2 の Hermite 対称空間の isotripy 表現の軌道として実現されることがわかっている。さらに、すべて Hopf 超曲面であって、主曲率は一定であり、異なる主曲率の個数 g は $g = 2, 3$ または 5 となる [16]。その後、Cecil-Ryan [4] は、 $\mathbf{C}\mathbf{P}^n$ 内の複素部分多様体上半径一定の tube 上にある実超曲面は Hopf であり、逆に $\mathbf{C}\mathbf{P}^n(4)$ 内の Hopf 超曲面 M^{2n-1} の Hopf 主曲率を $\mu = 2 \cot 2r$ ($0 < r < \pi/2$) と表した時、focal map $\phi_r : M \rightarrow \mathbf{C}\mathbf{P}^n$ の階数が一定ならば、その像 $\phi_r(M)$ は $\mathbf{C}\mathbf{P}^n$ 内の複素部分多様体 Σ であって、 M は Σ 上半径一定の tube であることを示した。そして、評者による定理 [8]:

$\mathbf{C}\mathbf{P}^n$ 内の主曲率が一定な Hopf 超曲面は、等質実超曲面 (の開集合) である

の証明が (pp.432-444 で) 述べられている。 M^{2n-1} を定理の仮定をみたく $\mathbf{C}\mathbf{P}^n$ 内の実超曲面とすると、Hopf fibration $\pi : S^{2n+1} \rightarrow \mathbf{C}\mathbf{P}^n$ による M の逆像 $M' = \pi^{-1}(M)$ は S^{2n+1} 内の等径超曲面であることがわかり、Münzner の結果を用いると、 M の異なる主曲率の個数 g は 2, 3 または 5 であることがわかる。 $g = 2, 3$ の場合は [4] より、測地的超球面 ($g = 2$) か全測地的部分多様体 $\mathbf{C}\mathbf{P}^k$ ($k = 1, \dots, n-2$) および $\mathbf{R}\mathbf{P}^n$ 上の tube ($g = 3$) であって、等質となり結果が従う。 $g = 5$ の場合、 M の focal set である $\mathbf{C}\mathbf{P}^n(4)$ (4 は $\mathbf{C}\mathbf{P}^n$ の正則断面曲率) 内の複素部分多様体 Σ は、そのすべての単位法ベクトル ξ について、shape operator A_ξ の固有値は 1, 0, -1 をもつ (これは、単位球面 $S^n(1)$ 内の $g = 4$ の等径超曲面の focal 多様体 M_\pm についても同様である)。このとき、 Σ が $\mathbf{C}\mathbf{P}^n$ 内の複素部分多様体であることを用いると、 Σ の第二基本形式 σ が平行であることがわかる。この証明で用いられるのは、 σ のノルムに関する Simons 型の微分方程式

$$\frac{1}{2}\Delta|\sigma|^2 = |\nabla'\sigma|^2 + 2(m+2)|\sigma|^2 - \Sigma(\text{trace } A_\alpha^2)^2 - 2\text{trace}(\Sigma A_\alpha^2)^2,$$

(m は Σ の複素次元で、 A_α は Σ の法空間の正規直交基 ξ_α に関する shape operator)

である。 \mathbf{CP}^n 内の第二基本形式が平行な複素部分多様体は、中川-高木 [12] によって分類されていて、全測地的な \mathbf{CP}^k か、階数 2 の Hermite 対称空間である。さらに上記の定理の仮定をみたす実超曲面で $g = 5$ の場合の、複素部分多様体である focal set は、(1) $\mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^{m-1}$ ($2m = n - 1 \geq 6$) の Segre embedding, (2) 複素 Grassmann 多様体 $SU(5)/S(U(2) \times U(3))$ ($m = 6, n = 9$) の Plücker embedding, (3) $SO(10)/U(5)$ ($m = 10, n = 15$) の half-spin embedding のいずれかであることがわかって、定理が証明される。一方で、 \mathbf{CH}^n 内の実超曲面についてはその後 Berndt によって 1989 年に同様の結果が証明されている (pp. 432) が、本質的には Cartan の恒等式 (1) による。8 章では、他にも \mathbf{CP}^n や \mathbf{CH}^n 内の実超曲面に関する最近までの様々な結果が述べられているが、この章が最も長くて 111 ページある。なお、 \mathbf{CP}^n や \mathbf{CH}^n 内の Hopf 超曲面については、その後評者が実超曲面から複素 2-plane Grassmann 多様体への Gauss 写像を用いて、四元数 Kähler 構造を用いた特徴付けや、その twistor 空間を用いた Hopf 超曲面の構成を得ている [6, 9] ので、参考にされたい。

9 章「四元数空間形内の実超曲面」において興味深い点の一つは、 \mathbf{CP}^n や \mathbf{CH}^n 内の実超曲面においては (誘導計量に関して) Einstein となるものは存在しないのだが、四元数射影空間 \mathbf{HP}^n においては、半径がある特別な値である測地的超球面が (誘導計量に関して) Einstein となり、 $(4n - 1)$ 次元球面上の非標準的な等質 Einstein 計量のモデルを与えている。

文献のリストも充実していて、8 章と 9 章には open problems も載っている。超曲面論の概要をまとめて読むことができる本書の重要性は極めて大きい。査読者の方に感謝します。

参考文献

- [1] T. E. Cecil and S. S. Chern, Tautness and Lie sphere geometry. *Math. Ann.* **278** (1987), 381–399.
- [2] T. E. Cecil, Q-S. Chi and G. R. Jensen, Isoparametric hypersurfaces with four principal curvatures. *Ann. of Math. (2)* **166** (2007), 1–76.
- [3] T. E. Cecil, Lie sphere geometry. With applications to submanifolds. Second edition. Universitext. Springer, New York, 2008. xii+208 pp.
- [4] T. E. Cecil, and P. J. Ryan, Focal sets and real hypersurfaces in complex projective space, *Trans. Amer. Math. Soc.* **269** (1982), 481–499.
- [5] T. E. Cecil, and P. J. Ryan, Tight and Taut immersions of manifolds, *Research*

- Notes in Math. **107**. Pitman, Boston, MA, 1985, vi+336 pp.
- [6] J. T. Cho and M. Kimura, Hopf hypersurfaces in complex hyperbolic space and submanifolds in indefinite complex 2-plane Grassmannian I. *Topol. Appl.*, **196** (2015), part B, 594-607.
 - [7] D. Ferus, H. Karcher and H.-F. Münzner, Cliffordalgebren und neue isoparametrische Hyperflächen, *Math. Z.* **177** (1981), 479–502.
 - [8] M. Kimura, Real hypersurfaces and complex submanifolds in complex projective space, *Trans. Amer. Math. Soc.* **296** (1986), 137–149.
 - [9] M. Kimura, Hopf hypersurfaces in complex projective space and half-dimensional totally complex submanifolds in complex 2-plane Grassmannian, I. *Diff. Geom. Appl.* **35** (2014), 266-273, II. *Diff. Geom. Appl.*, to appear.
 - [10] H. B. Lawson, Rigidity theorems in rank-1 symmetric space. *J. Diff. Geom.* **4** (1970), 349–357.
 - [11] H.-F. Münzner, Isoparametrische Hyperflächen in Sphären, I. *Math. Ann.* **251** (1980), 57–71, II. *Math. Ann.* **256** (1981), 215–232.
 - [12] H. Nakagawa and R. Takagi, On locally symmetric Kaehler submanifolds in a complex projective space, *J. Math. Soc. Japan* **28** (1976), 638–667.
 - [13] H. Ozeki, M. Takeuchi, On some types of isoparametric hypersurfaces in spheres, I. *Tôhoku Math. J.* **27** (1975), 515–559, II. *Tôhoku Math. J.* **28** (1976), 7–55.
 - [14] C. Somigliana, Sulle relazione fra il principio di Huygens e l’ottica geometria, *Atti. Accad. Sci. Torino* **54** (1918-1919), 974–949.
 - [15] R. Takagi, On homogeneous real hypersurfaces in a complex projective space, *Osaka J. Math.* **10** (1973), 495–506.
 - [16] R. Takagi, Real hypersurfaces in a complex projective space with constant principal curvature, *J. Math. Soc. Japan* **27** (1975), 43–53.