

Gauss map of real hypersurfaces in non-flat complex space forms and twistor space of complex 2-plane Grassmannian

木村 真琴 (茨城大学)

2019 年 9 月 17 日

日本数学会 2019 年度秋季総合分科会特別講演

内容

- S^{n+1} の超曲面の Gauss 写像, 等径超曲面,

内容

- S^{n+1} の超曲面の Gauss 写像, 等径超曲面,
- CP^n の実超曲面 (特に Hopf 超曲面) の Gauss 写像と $G_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の四元数 Kähler 構造, twistor 空間,

内容

- S^{n+1} の超曲面の Gauss 写像, 等径超曲面,
- CP^n の実超曲面 (特に Hopf 超曲面) の Gauss 写像と $G_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の四元数 Kähler 構造, twistor 空間,
- CH^n の Hopf 超曲面と $G_{1,1}(\mathbb{C}_1^{n+1})$ のパラ四元数 Kähler 構造.

球面内の超曲面の Gauss 写像

\mathbb{S}^{n+1} 内の超曲面の Gauss 写像

$x : M^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$: immersion,

$N : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$: $x(M)$ の単位法ベクトル場

\rightsquigarrow

$\gamma : M^n \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}_2(\mathbb{R}^{n+2}) \cong \mathbb{Q}^n$: Gauss 写像,

$\gamma(p) := x(p) \wedge N(p)$.

ここで M^n : \mathbb{S}^{n+1} 内の向きつけられた超曲面,

$\tilde{\mathbb{G}}_2(\mathbb{R}^{n+2})$: 有向実 Grassmann 多様体,

\mathbb{Q}^n : $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1}$ 内の複素 2 次超曲面.

球面内の超曲面の Gauss 写像

Theorem (B.Palmer, '97)

$M^n; \mathbb{S}^{n+1}$ の有向超曲面

\Rightarrow

$\gamma(M): \mathbb{Q}^n$ の Lagrange 部分多様体.

$M^n: \mathbb{S}^{n+1}$ の超曲面として等径的 (主曲率一定) または austere (Harvey-Lawson, '82)

\Rightarrow

$\gamma(M): \mathbb{Q}^n$ の極小 Lagrange 部分多様体.

実空間形の等径超曲面

実空間形の等径超曲面

$\widetilde{M}^{n+1}(c)$: 断面曲率が定数 c の実空間形,
 M^n : $\widetilde{M}^{n+1}(c)$ の超曲面について、以下の3条件は同値:

(a) $\exists F : \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$: **等径**, $\exists t \in \mathbb{R}, M = F^{-1}(t)$.

(b) M_t ($-\varepsilon < t < \varepsilon$): M の **平行超曲面**の族は、すべての t について**平均曲率が一定**.

(c) M の**すべての主曲率が一定**.

等径函数

Riemann 多様体の等径函数

\widetilde{M} : Riemann 多様体,

$F : \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$: 可微分函数が等径 (isoparametric)

\Leftrightarrow

$|\text{grad } F|$ と ΔF は $\forall t \in \mathbb{R}$ について $F^{-1}(t)$ 上一定。

注

一般の Riemann 多様体 \widetilde{M} についても、上の (a) と (b) の同値性は成り立つが、その場合でも (c) が成り立つとは限らない。

平行超曲面

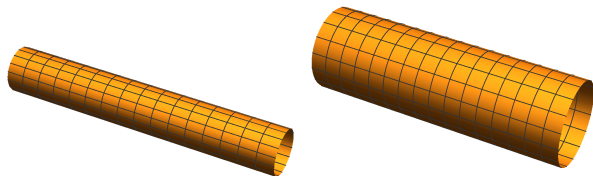
平行超曲面

\widetilde{M} : Riemann 多様体,
 M : \widetilde{M} の超曲面に対して

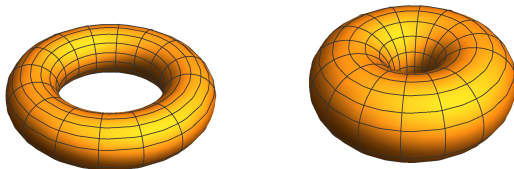
$$\phi_r(M) := \{\exp_x(rN_x) \mid x \in M\} \quad (0 < r)$$

が \widetilde{M} の超曲面であるとき、これを M の**平行超曲面**という。

\mathbb{R}^3 の平行超曲面の例: 円柱



\mathbb{R}^3 の平行超曲面の例: 回転トーラス



平行超曲面の Gauss image の不変性

平行超曲面の Gauss image の不変性

$M^n: \mathbb{S}^{n+1}$ の有向超曲面,

$\phi_r(M)$: M の平行超曲面,

$\gamma: M^n \rightarrow \mathbb{Q}^n$: Gauss 写像に対して

$$\gamma(\phi_r(M)) = \gamma(M).$$

球面の等径超曲面

球面の等径超曲面の主曲率 (Münzner)

M^n : \mathbb{S}^{n+1} の (連結) 等径超曲面,

$\lambda_i = \cot \theta_i$, $0 < \theta_1 < \dots < \theta_g < \pi$: g 個の (一定) 主曲率を持ち、それらの重複度を m_i とする

\Rightarrow

$$\theta_i = \theta_1 + (i - 1) \frac{\pi}{g} \quad (1 \leq i \leq g),$$

$$m_i \equiv m_{i+2} \pmod{g}.$$

球面の等径超曲面

球面の等径超曲面の定義方程式 (Münzner)

球面 \mathbb{S}^{n+1} 内の等径超曲面 M^n は \mathbb{R}^{n+2} 上の次数 g の**斉次多項式** F (Cartan-Münzner 多項式) で、以下の微分方程式をみたすものを \mathbb{S}^{n+1} に制限した函数の level set (の open subset) である:

$$|\operatorname{grad} F|^2 = g^2 r^{2g-2}, \quad \Delta F = cr^{g-2},$$

ここで $r = |x|$, $c = g^2(m_2 - m_1)/2$.

球面の等径超曲面

球面の等径超曲面の主曲率の個数 (Münzner)

球面 S^{n+1} 内の等径超曲面 M^n について、異なる主曲率の個数は

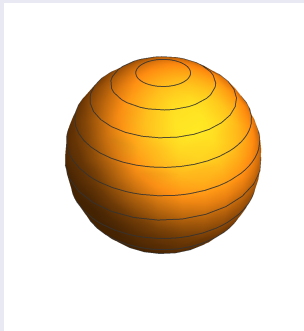
$$g = 1, 2, 3, 4, 6$$

である.

球面の等径超曲面

$g = 1$ の等径超曲面

大球と小球:



球面の等径超曲面

$g = 2$ の等径超曲面

球面の積: $M_r = \mathbb{S}^k(\cos r) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sin r)$,
 $0 < r < \pi/2$.

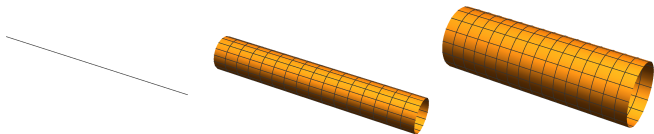
Focal submanifolds と tube

$r = 0$: $M_+ = \mathbb{S}^k(1) \times \{p_2\}$,

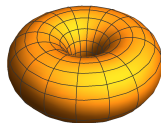
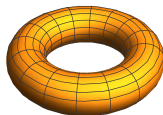
$r = \pi/2$: $M_- := \{p_1\} \times \mathbb{S}^{n-k}(1)$

を ($g = 2$ の) 等径超曲面 M_r の focal submanifold
という。逆に、 M_r を M_+ 上半径 r の tube と
いう。

\mathbb{R}^3 内の focal set と tube



\mathbb{R}^3 内の focal set と tube



球面の等径超曲面

$g = 3$ の等径超曲面

斜体 $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ に関する射影平面 FP^2 を球面 S^{n+1} ($n = 3, 6, 12, 24$) に標準的に埋め込んだ部分多様体上の tube である (Cartan 超曲面ともよばれる).

$g = 4$ の等径超曲面

S^{n+1} の非等質な $g = 4$ の等径超曲面が、Münzner の結果を用いて尾関-竹内によって構成された。後に Ferus-Karcher-Münzner によって Clifford 代数の表現を用いて一般化された (OT-FKM type).

球面の等径超曲面

球面の等径超曲面の分類と応用

微分幾何に加えて微分トポロジー、K-理論、表現論、可換環論、代数幾何などを駆使して、 \mathbb{S}^{n+1} 内の等径超曲面は等質超曲面か OT-FKM type の非等質超曲面に限ることが示された。

2019年6月に北京師範大学で「Workshop on the isoparametric theory」が開催され、「異種球面」への応用など、様々な結果が報告された。

Kähler 多様体の Hopf 超曲面

実超曲面の構造ベクトル場

M^{2n-1} : Kähler 多様体 (\widetilde{M}^n, J) の有向実超曲面,
 N : $M \subset \widetilde{M}$ の単位法ベクトル場,
 $\xi := -JN$: M の構造ベクトル場.

Hopf 超曲面

M^{2n-1} : Kähler 多様体 (\widetilde{M}^n, J) の有向実超曲面,
 M : \widetilde{M} の Hopf 超曲面
 $\Leftrightarrow A\xi = \mu\xi$ (μ : Hopf 主曲率).

A : $M \subset \widetilde{M}$ の形作用素
($AX := -D_X N$, $X \in TM$).

複素空間形の Hopf 超曲面

Hopf 主曲率

μ : constant ($\widetilde{M} = \mathbb{C}P^n$, Y. Maeda, '76),
($\widetilde{M} = \mathbb{C}H^n$, Ki-Suh, '90).

Hopf 超曲面の平行超曲面

M^{2n-1} : 複素空間形 \widetilde{M} の Hopf 超曲面

\Rightarrow

M の平行超曲面 M_t も Hopf (Cecil-Ryan, '82).

$\mathbb{C}P^n$ の Hopf 超曲面

Theorem (Cecil-Ryan, '82)

(1) Σ : $\mathbb{C}P^n$ の複素部分多様体

\Rightarrow

$M = \phi_r(\Sigma)$: Σ 上半径 $r > 0$ の tube 上にある実超曲面は Hopf.

(2) M : $\mathbb{C}P^n(4)$ の Hopf 超曲面で $\mu = 2 \cot 2r$
($0 < r < \pi/2$) \Rightarrow

$\phi_r(M)$: Focal 写像の像は, ϕ_r の階数が一定ならば $\mathbb{C}P^n$ の複素部分多様体で、(1) の逆が成り立つ。

$\mathbb{C}P^n$ の Hopf 超曲面

Theorem (Borisenko, '01)

M : $\mathbb{C}P^n$ のコンパクト embedded Hopf 超曲面

\Rightarrow

M : $\mathbb{C}P^n$ のある algebraic variety の tube.

$\mathbb{C}P^n$ の等質実超曲面

M : $\mathbb{C}P^n$ の等質実超曲面

\Rightarrow

M : 階数 2 の Hermite 対称空間のイソトロピー表現の軌道として得られて、Hopf 超曲面 (R. Takagi, '73, '75).

$\mathbb{C}P^n$ の等質実超曲面

$\mathbb{C}P^n$ の等質実超曲面

M : $\mathbb{C}P^n$ の Hopf 超曲面で主曲率一定

\Leftrightarrow

M is 等質 (したがって等径) で、以下の $\mathbb{C}P^n$ の複素部分多様体上の tube (K. '86):

g : M の異なる (一定) 主曲率の個数,

$\mathbb{C}P^n$ の等質実超曲面の focal 複素部分多様体

$\mathbb{C}P^n$ の等質実超曲面の focal 複素部分多様体

- (a) ($g = 2, 3$), 全測地的 $\mathbb{C}P^k$ ($0 \leq k \leq n - 1$),
- (b) ($g = 3$), 複素二次超曲面 \mathbb{Q}^{n-1} ,
- (c) ($g = 5$), $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^k$ ($n = 2k + 1$), Segre embedding,
- (d) ($g = 5$), $\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^5)$ ($n = 9$), Plücker embedding,
- (e) ($g = 5$), $SO(10)/U(5)$ ($n = 15$), Half spin embedding.

$\mathbb{C}P^n$ の等径実超曲面

$\mathbb{C}P^n$ の等径実超曲面

$\mathbb{C}P^n$ において、非等質, 非 Hopf の等径 (したがって主曲率は一定でない) 実超曲面が存在する (Q.M. Wang, '82, Dominguez-Vazquez, '16).

$\mathbb{C}P^n$ の主曲率一定実超曲面

$\mathbb{C}P^n$, $n \geq 3$ の主曲率一定な実超曲面の分類は未解決!?

$\mathbb{C}P^n$ の実超曲面の Gauss 写像

$\mathbb{C}P^n$ の実超曲面の Gauss 写像

$x : M^{2n-1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$: immersion,

$N : M \subset \mathbb{C}P^n$ の単位法ベクトル場

\rightsquigarrow

$\gamma : M^{2n-1} \rightarrow \mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+2})$: Gauss 写像,

$\gamma(p) = \text{span}_{\mathbb{C}}\{x(p), N(p)\}$.

ここで M^{2n-1} : $\mathbb{C}P^n$ の有向実超曲面,

$\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+2})$: 複素 2-平面 Grassmann 多様体で四元数 Kähler 構造 (\tilde{g}, Q) をもつ.

平行超曲面の Gauss image の不変性

平行超曲面の Gauss image の不変性

M^{2n-1} : $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ の有向超曲面,

$\phi_r(M)$: M の平行超曲面,

$\gamma : M^{2n-1} \rightarrow \mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+2})$: Gauss 写像に対して

$$\gamma(\phi_r(M)) = \gamma(M).$$

四元数 Kähler 多様体

$(\widetilde{M}^{4m}, \tilde{g}, Q)$: 四元数 Kähler 多様体

$\Leftrightarrow \tilde{g}$: \widetilde{M} の Riemann 計量, Q : $\text{End}T\widetilde{M}$ の階数 3 の部分束,

(1) $\forall p \in \widetilde{M}, \exists U$: p の近傍, $\exists Q$ の局所 frame 場 $\{\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{I}_3\}$ s.t.

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1^2 = \tilde{I}_2^2 = \tilde{I}_3^2 = -1, & \quad \tilde{I}_1\tilde{I}_2 = -\tilde{I}_2\tilde{I}_1 = \tilde{I}_3, \\ \tilde{I}_2\tilde{I}_3 = -\tilde{I}_3\tilde{I}_2 = \tilde{I}_1, & \quad \tilde{I}_3\tilde{I}_1 = -\tilde{I}_1\tilde{I}_3 = \tilde{I}_2, \end{aligned}$$

四元数 Kähler 多様体

$(\widetilde{M}^{4m}, \tilde{g}, Q)$: 四元数 Kähler 多様体

(2) $\forall L \in Q_p$ について,

$$\tilde{g}_p(LX, Y) + \tilde{g}_p(X, LY) = 0,$$

$X, Y \in T_p\widetilde{M}, p \in \widetilde{M}$.

(3) ベクトル束 Q は $\text{End } T\widetilde{M}$ において \tilde{g} の Levi-Civita 接続に関して平行.

概 Hermite 部分多様体

概 Hermite 部分多様体

M^{2m} : 四元数 Kähler 多様体 \widetilde{M} の部分多様体が概 Hermite 部分多様体

\Leftrightarrow

$\exists \tilde{I}: M$ 上のベクトル束 $Q|_M$ の section s.t.

(1) $\tilde{I}^2 = -1$, (2) $\tilde{I}TM = TM$.

$I: \tilde{I}$ によって誘導される M の概複素構造 \Rightarrow
 (M, I) : 概 Herite 多様体.

Kähler 部分多様体と全複素部分多様体

Kähler 部分多様体と全複素部分多様体

(M, \bar{g}, I) : 四元数 Kähler 多様体 \tilde{M} の概 Hermite 部分多様体が

(1) Kähler $\Leftrightarrow (M, \bar{g}, I)$: Kähler 多様体.

(2) 全複素部分多様体 $\Leftrightarrow \forall p \in M$, for $\tilde{L}_p \in Q_p$ with $\tilde{I}_p \tilde{L}_p + \tilde{L}_p \tilde{I}_p = 0$, $\tilde{L}T_p M \perp T_p M$.

Theorem (Alekseevsky-Marchiafava, '01)

四元数 Kähler 多様体 \tilde{M} の概 Hermite 部分多様体 (M, \bar{g}, I) について、全複素 \Leftrightarrow Kähler.

$\mathbb{C}P^n$ の実超曲面の Gauss 写像

Theorem 1. (K. '14)

M^{2n-1} : $\mathbb{C}P^n$ の実超曲面,

$\gamma : M \rightarrow \mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$: Gauss 写像とする。

(1) M : **非 Hopf** $\Rightarrow \gamma$: an **immersion**.

(2) M : **Hopf** $\Rightarrow \gamma(M)$: $\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の半分次元の
全複素 (ゆえに極小) 部分多様体であって、

$(M, \gamma(M), \gamma)$ は Kähler 多様体 $\gamma(M)$ 上の主 S^1 -束.

さらに、各 fiber は M の構造ベクトル場 ξ の積分曲線で、 $\mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^n$ 内の**円**である。

$G_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の全複素部分多様体

$G_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の全複素部分多様体

CP^n の複素部分多様体について、その余法束を $G_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の半分次元の全複素部分多様体として実現できることが示されている (Tsukada, '16).

Examples

例 1.

M^{2n-1} : $\mathbb{C}P^n$ の Hopf (等質) 実超曲面で、全測地的複素部分多様体 $\mathbb{C}P^k$ ($0 \leq k \leq n-1$) 上半径 r ($0 < r < \pi/2$) の tube

\Rightarrow

Gauss image $\gamma(M)$ は $G_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の全複素, 全測地的部分多様体 $\mathbb{C}P^k \times \mathbb{C}P^{n-k-1}$.

Examples

例 2.

$M^{2n-1} : \mathbb{C}P^n$ の Hopf (等質) 実超曲面で、複素二次超曲面 \mathbb{Q}^{n-1} 上半径 r ($0 < r < \pi/4$) の tube

\Rightarrow

Gauss image $\gamma(M)$ は $\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の全複素, 全測地的部分多様体 $\mathbb{G}_2(\mathbb{R}^{n+1})$.

四元数 Kähler 多様体の twistor 空間

四元数 Kähler 多様体の twistor 空間

\tilde{M} : 四元数 Kähler 多様体に対して,
 $\mathcal{Z} = \{\tilde{I} \in Q \mid \tilde{I}^2 = -1\}$: \tilde{M} 上の S^2 -束を \tilde{M} の **twistor 空間** という。

(1) \tilde{M} : Ricci 曲率が非零 $\Rightarrow \mathcal{Z}$ は **複素接触構造** をもつ。

(2) \tilde{M} : $\text{Ric} > 0 \Rightarrow \mathcal{Z}$ は $\text{Ric} > 0$ の **Einstein-Kähler 計量** を持ち、twistor fibration $\pi: \mathcal{Z} \rightarrow \tilde{M}$ は各 fiber が全測地的な Riemannian submersion である (D. Salamon, '82).

$\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の twistor 空間

Remark

$\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の twistor 空間 \mathcal{Z} は, (1) \mathbb{C}^{n+1} 内の直交する2つの複素直線の組全体の集合, あるいは

(2) $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ の射影余接束 $P(T^*\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$ と同一視できて、

(3) 等質空間としては

$U(n+1)/U(n-1) \times U(1) \times U(1)$ (Kähler C-space). と表される (Salamon '82, Tsukada, '16).

$\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の四元数 Kähler 構造

$\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の四元数 Kähler 構造

$V_2(\mathbb{C}^{n+1})$: 複素 Stiefel 多様体,
 $(u_1, u_2) \in V_2(\mathbb{C}^{n+1})$: \mathbb{C}^{n+1} の orthonormal
2-vectors,

$\pi : V_2(\mathbb{C}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$,
 $(u_1, u_2) \mapsto \mathbb{C}u_1 \oplus \mathbb{C}u_2$: 射影について,

接空間 $T_{\pi(u_1, u_2)}(\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1}))$ は π_* を介して
 $\{u_1, u_2\}^\perp \times \{u_1, u_2\}^\perp \subset \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1}$ と同
一視できる.

$\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の四元数 Kähler 構造

$\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の四元数 Kähler 構造

このとき, $(u_1, u_2) \in V_2(\mathbb{C}^{n+1})$ について
 $\pi(u_1, u_2) \in \mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ における四元数 Kähler 構造の基底 I_1, I_2, I_3 が次のように与えられる:

$$(x_1, x_2) \in \{u_1, u_2\}^\perp \times \{u_1, u_2\}^\perp,$$

$$I_1 : (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

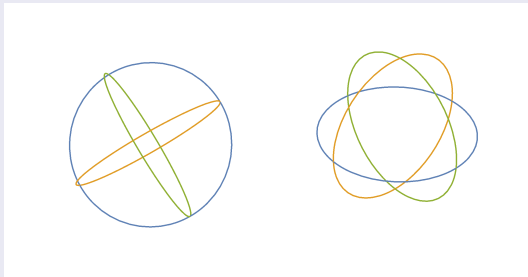
$$I_2 : (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2) \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

$$I_3 : (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathbb{C}P^n$ 内の $\mathbb{C}P^1$ 上の測地線と同心円

$\mathbb{C}P^n$ 内の $\mathbb{C}P^1$ 上の測地線と同心円

このとき、 I_1, I_2, I_3 と $S^2 = \mathbb{C}P^1$: u_1 と u_2 で張られる複素射影直線上の直交する 3 つの大円が対応する:



逆構成

全複素部分多様体の natural lift

$\varphi : \Sigma^{n-1} \rightarrow \mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$: 全複素 immersion について,

$$\forall p \in \Sigma \rightsquigarrow \tilde{I}_p \in Q_{\varphi(p)} \subset \mathcal{Z}.$$

$\tilde{I}(\Sigma)$: $\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の twistor 空間 \mathcal{Z} の部分多様体 (natural lift) で,

\mathcal{Z} の複素接触構造に関して複素 Legendre 部分多様体 (Alekseevsky-Marchiafava, '05).

逆構成

Twistor 空間上の S^1 -束

$E := V_2(\mathbb{C}^{n+1})/S^1$ は \mathcal{Z} 上の S^1 -束で, 各 fiber は $\mathbb{C}P^n$ の測地線と同一視できる。

このとき、次の図式について:

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{I}^* E & \xrightarrow{\eta} & E & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{C}P^n \\ \downarrow & & \downarrow & & , \\ \Sigma^{n-1} & \xrightarrow{\tilde{I}} & \mathcal{Z} & & \end{array}$$

逆構成

逆構成

写像 $\Phi := \psi \circ \eta : \tilde{I}^*E \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ が ($M = \tilde{I}^*E$ の Φ に関する正則点において) $A\xi = 0$ をみたす Hopf 超曲面を与える.

そして、その平行超曲面 $\phi_r(\tilde{I}^*E)$ ($r \in (-\pi/4, \pi/4) - \{0\}$) が $A\xi = 2 \tan 2r\xi$ の Hopf 超曲面を与える (K., 2017).

$\mathbb{C}H^n$ の Hopf 超曲面, 既知の結果

$\mathbb{C}H^n(-4)$ の Hopf 超曲面, $|\mu| > 2$

M^{2n-1} : $\mathbb{C}H^n(-4)$ の Hopf, $|\mu| > 2$,

$\Leftrightarrow \Sigma$: $\mathbb{C}H^n$ の複素部分多様体. (Montiel, '85)

$\mathbb{C}H^n(-4)$ の Hopf 超曲面, $|\mu| < 2$

M^{2n-1} : $\mathbb{C}H^n(-4)$ の Hopf 超曲面, $|\mu| < 2$,

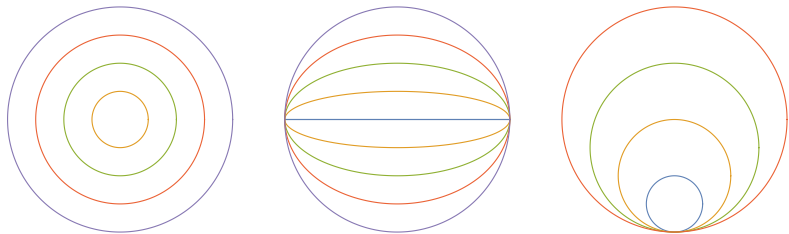
$\Leftrightarrow \Sigma_1, \Sigma_2$: S^{2n-1} の Legendre 部分多様体の pair
(Ivey, '11)

$\mathbb{C}H^n$ の主曲率一定な Hopf 超曲面

$\mathbb{C}H^n(-4)$ の主曲率一定な Hopf 超曲面

- (1) ($g = 2, 3, |\mu| > 2$) 全測地的複素部分多様体 $\mathbb{C}H^k$ ($0 \leq k \leq n - 1$) 上の tube,
- (2) ($g = 2, |\mu| = 2$) ホロ球面 (Ricci ソリトン (Hashinaga-Kubo-Tamaru, '16)),
- (3) ($g = 2, 3, |\mu| < 2$) 全測地的 Lagrange 部分多様体 $\mathbb{R}H^n$ 上の tube.
(Montiel '85, Berndt '89)

$\mathbb{C}H^n$ の主曲率一定な Hopf 超曲面



$\mathbb{C}H^n$ の実超曲面の Gauss 写像

$\mathbb{C}H^n$ の実超曲面の Gauss 写像

$x : M^{2n-1} \rightarrow \mathbb{C}H^n$: immersion,

N : $\mathbb{C}H^n$ 内の M の単位法ベクトル場について,

\rightsquigarrow

$\gamma : M^{2n-1} \rightarrow \mathbb{G}_{1,1}(\mathbb{C}_1^{n+1})$: Gauss 写像,

$\gamma(p) := \text{span}_{\mathbb{C}}\{x(p), N(p)\}$.

ここで, M^{2n-1} : $\mathbb{C}H^n$ の有向実超曲面,

$\mathbb{G}_{1,1}(\mathbb{C}_1^{n+2})$: \mathbb{C}_1^{n+1} の不定値複素 2-平面のなす,

複素 Grassmann 多様体で, パラ四元数 Kähler 構造 (\tilde{g}, Q) をもつ.

パラ四元数 Kähler 多様体

$(\widetilde{M}^{4m}, \tilde{g}, Q)$ パラ四元数 Kähler 多様体

$\Leftrightarrow \tilde{g}: \widetilde{M}$ の **neutral** 擬 Riemann 計量,

$Q: \text{End}T\widetilde{M}$ の階数 3 の部分束,

(1) $\forall p \in \widetilde{M}$, $\exists U: p$ の近傍,

$\exists \{\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{I}_3\}: Q$ の局所 frame 場 s.t.

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1^2 &= \mathbf{1}, \quad \tilde{I}_2^2 = \tilde{I}_3^2 = -1, \quad \tilde{I}_1\tilde{I}_2 = -\tilde{I}_2\tilde{I}_1 = -\tilde{I}_3, \\ \tilde{I}_2\tilde{I}_3 &= -\tilde{I}_3\tilde{I}_2 = \tilde{I}_1, \quad \tilde{I}_3\tilde{I}_1 = -\tilde{I}_1\tilde{I}_3 = -\tilde{I}_2, \end{aligned}$$

パラ四元数 Kähler 多様体

$(\widetilde{M}^{4m}, \tilde{g}, Q)$ パラ四元数 Kähler 多様体

(2) $\forall L \in Q_p$ について,

$$\tilde{g}_p(LX, Y) + \tilde{g}_p(X, LY) = 0,$$

$X, Y \in T_p\widetilde{M}, p \in \widetilde{M}.$

(3) ベクトル束 Q は $\text{End } T\widetilde{M}$ において \tilde{g} の Levi-Civita 接続に関して平行.

パラ四元数構造

パラ四元数構造の切断

$$Q_p = \{aI_1 + bI_2 + cI_3 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} \cong \mathfrak{su}(1, 1) \cong \mathbb{R}_1^3,$$

$$Q_+ = \{I \in \tilde{V} \mid I^2 = 1\} \cong \mathbb{S}_1^2: \text{de-Sitter 平面},$$

$$Q_- = \{I \in \tilde{V} \mid I^2 = -1\} \cong \mathbb{H}^2: \text{双曲平面},$$

$$Q_0 = \{I \in \tilde{V} \mid I^2 = 0, I \neq 0\} \cong \text{光錐}.$$

Theorem 2

Cho and K., '15

M^{2n-1} : $\mathbb{C}H^n(-4)$ の実超曲面,

$\gamma : M \rightarrow \mathbb{G}_{1,1}(\mathbb{C}_1^{n+1})$: Gauss 写像.

M : Hopf, $|\mu| > 2$ (resp. $0 \leq |\mu| < 2$).

\Rightarrow

$\gamma(M)$: $\mathbb{G}_{1,1}(\mathbb{C}_1^{n+1})$ の実 $(2n - 2)$ -次元部分多様体,

Theorem 2

Cho and K. '15

$\exists \tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{I}_3: \tilde{Q}|_{\gamma(M)}$ のパラ四元数 Kähler 構造の切断で、 $\tilde{Q}_{\gamma(p)}$ ($p \in \Sigma$) の自然な内積について正規直交であって、

$$(\tilde{I}_1)^2 = -1 \quad (\text{resp. } (\tilde{I}_1)^2 = 1),$$

$$(\tilde{I}_2)^2 = 1 \quad (\text{resp. } (\tilde{I}_2)^2 = -1) \quad \text{and} \quad (\tilde{I}_3)^2 = 1,$$

$$\text{s.t.}, \quad \tilde{I}_1(d\gamma_x(T_x M)) \subset d\gamma_x(T_x M),$$

$$\tilde{I}_2(d\gamma_x(T_x M)), \tilde{I}_3(d\gamma_x(T_x M)) \perp d\gamma_x(T_x M).$$

Theorem 2

Cho and K., '15

$\gamma(M)$ の $\mathbb{G}_{1,1}(\mathbb{C}_1^{n+1})$ からの誘導計量は、符号 (p, q) をもつ:

$$p = \sum_{|\lambda| > 1} \dim\{X \mid AX = \lambda X, X \perp \xi\},$$

$$q = \sum_{|\lambda| < 1} \dim\{X \mid AX = \lambda X, X \perp \xi\}.$$

$|\mu| > 2$ のとき: p と q はともに偶数,

$0 \leq |\mu| < 2$ のとき: $p = q$.

Theorem 2

Cho and K., '15

さらに $p + q = 2n - 2$ のとき, $\gamma(M)$ の誘導計量は非退化で、 $\gamma(M): \mathbb{G}_{1,1}(\mathbb{C}^{n+1})$ の擬 Kähler (resp. パラ-Kähler) 部分多様体.

$\mathbb{C}H^n(-4)$ の $|\mu| = 2$ の Hopf 超曲面

$\mathbb{C}H^n(-4)$ の Hopf 超曲面で $|\mu| = 2$ の場合についても、同様の結果が成り立つ。

特に、 $\gamma(M)$: 光的 $\Leftrightarrow M$: 水口球面.

$\mathbb{G}_{1,1}(\mathbb{C}_1^{n+1})$ の twistor 空間

Construction of Hopf hypersurfaces

$\mathbb{G}_{1,1}(\mathbb{C}_1^{n+1})$ のパラ四元数 Kähler 構造に関して, 3 つの twistor 空間が定義できる (cf.

Alekseevsky-Cortés, '08):

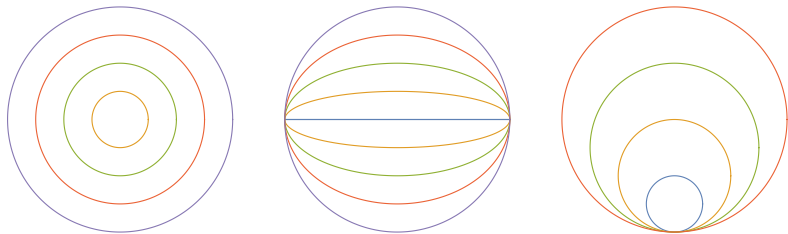
$$\mathcal{Z}_+ = \{I \in Q \mid I^2 = 1\},$$

$$\mathcal{Z}_- = \{I \in Q \mid I^2 = -1\},$$

$$\mathcal{Z}_0 = \{I \in Q \mid I^2 = 0, I \neq 0\}.$$

このとき、それぞれの twistor 空間内の「水平」部分多様体 Σ^{2n-2} から, $\mathbb{C}\mathbb{H}^n(-4)$ の Hopf 超曲面で $|\mu| < 2$, $|\mu| > 2$, $|\mu| = 2$ をみたすものが構成できる (準備中).

$G_{1,1}(\mathbb{C}_1^{n+1})$ の twistor 空間



今後の課題

- $\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の twistor 空間 \mathcal{Z} の部分多様体から構成できる, $\mathbb{C}P^n$ の測地線で foliate された部分多様体 (ruled surface の一般化) の研究,

今後の課題

- $\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の twistor 空間 \mathcal{Z} の部分多様体から構成できる, $\mathbb{C}P^n$ の測地線で foliate された部分多様体 (ruled surface の一般化) の研究,
- (Hermite) 対称空間の超曲面 (部分多様体) の Gauss 写像の研究,

今後の課題

- $\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の twistor 空間 \mathcal{Z} の部分多様体から構成できる, $\mathbb{C}P^n$ の測地線で foliate された部分多様体 (ruled surface の一般化) の研究,
- (Hermite) 対称空間の超曲面 (部分多様体) の Gauss 写像の研究,
- 四元数対称空間 (Wolf 空間) の半分次元の全複素部分多様体の研究.